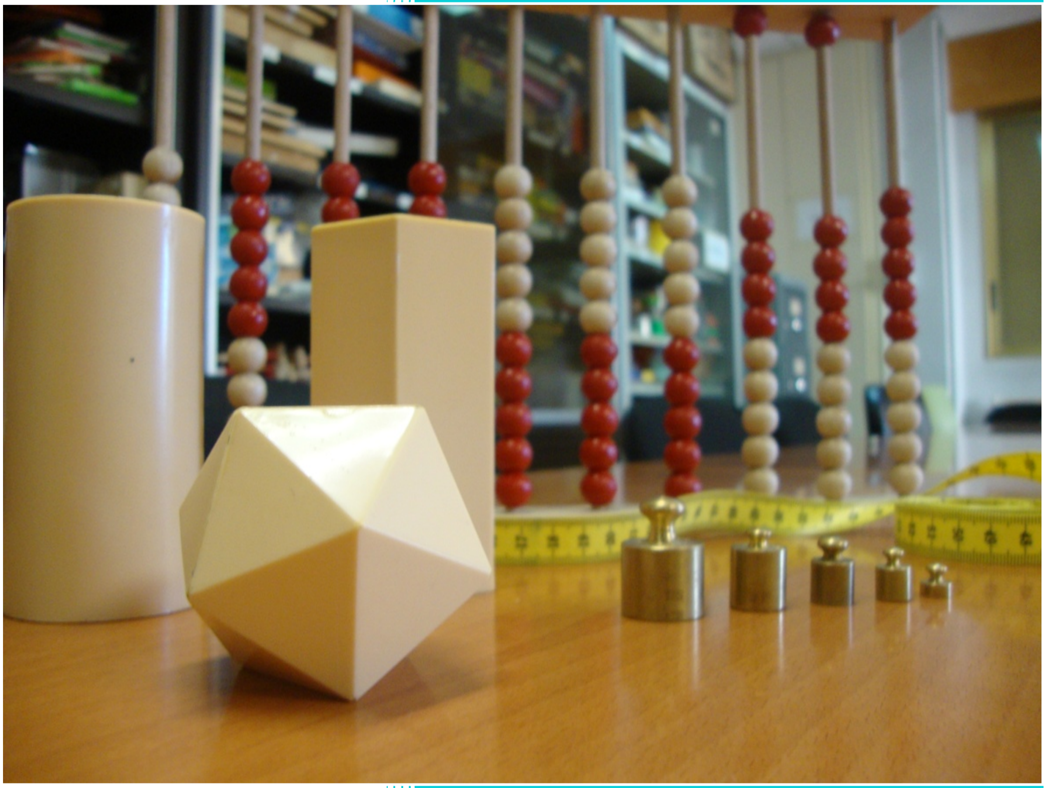
MATERIALES Y RECURSOS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS



UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Edición:

Mario García Serrano

Autores:

Pablo Flores

José Luis Lupiáñez

Luis Berenguer

Antonio Marín

Marta Molina

ISBN: 978-84-694-7480-8

Granada, 2011

Materiales y Recursos en el aula de Matemáticas

ÍNDICE

Tema 1. Enseñanza de las Matemáticas en el Aula **5**

1. Enseñar y aprender 6
    1.1 Un material: El Libro de Fracciones 10
2. Enseñanza y aprendizaje: Actividades y tareas 13
    2.1 Tipos de actividades y tareas 17
    2.2.Materiales para la enseñanza de las fracciones 22
3. Los medios: el aula como laboratorio y el aula como taller de matemáticas. 35
4. A modo de síntesis 37
5. Actividades de evaluación del tema 39

Tema 2. Análisis y Clasificación de los Materiales **41**

1. Necesidad de Clasificación. Criterios de clasificación. 42
2. Clasificación a partir del contenido matemático 45
    2.1. Materiales para la enseñanza de la Geometría 45
    2.2 Geoplano 48
    2.3 Mecano 50
3. Recursos materiales versátiles: El papel doblado. 53
    3.1 Papel Plegado 54

4 El profesor y los materiales/recursos didácticos. Aprovechamiento y construcción. 65
    4.1 Aprovechamiento del entorno 66
    4.2 El profesor artesano 68
    4.3. Compra de materiales y recursos didácticos 69
    4.4 Libros de matemática divulgativa 70

5 A modo de síntesis. 71
6 Actividad obligatoria de evaluación Tema 2. 72

Tema 3. Los Materiales para la Enseñanza de los Bloques Temáticos del Currículo. **73**

1 Materiales para el bloque de números 74
    1.1 Fichas de colores 74
    1.2 Dominó fracciones 77
    1.3 Suma 15 78
    1.4 Tablero de decimales 78
    1.5 Puzzles numéricos 79
    1.6 Círculo de fracciones 81
    1.7 Tiras de fracciones 81

2 Materiales para el bloque de geometría 82
2.1 Círculo de ángulos 82
2.2 Varillas y vértices 83
2.3 Teselas 83
2.4 Mecano 84
2.5 Puzzles 2D 85
2.6 Puzzles 3D 87
2.7 Libro de espejos 90
3 Materiales para el bloque de álgebra 92
3.1 Tabla 100 92
3.2 Liga de campeones 94
3.3 Pista de álgebra 95
3.4 Subir al 0 96
4 Materiales para el bloque de estadística y probabilidad 97
4.1 Fichas de colores 97
4.2 Juegos para introducir la probabilidad 98
5 Actividades de evaluación 103

Tema 4. Nuevas Tecnologías y Medios Audiovisuales en el Aula de Matemáticas. 105

1 Ordenadores e Internet. 107
1.1 Software específico de matemática 109
1.2 Materiales y recursos a través de Internet 112
2 Calculadoras en clase de matemáticas ¿Sí ó no? ¿Cómo? 118
3 Medios audiovisuales: la fotografía, el cine y la televisión 120
3.1 Fotografía: "capturando" la matemática 121
3.2 Un guiño al séptimo arte 128
4 A modo de síntesis… 134
5 Actividades para profundizar 135

Tema 5: Planificación de Tareas Empleando Materiales y Recursos 137

1.Elementos de la planificación en matemáticas 137
1.1 Los marcos de referencia. 137
1.2. Centrándose en un marco curricular: El marco PISA 139
2. Selección, secuenciación y diseño de tareas escolares con materiales y recursos 147
2.1 Análisis de materiales y recursos en el marco de la U.D. 147
2.2 Análisis de tareas en el marco de la U.D. 150
3 Organizadores curriculares para la planificación de tareas en unidades didácticas 157
4. Organización y estructura de una unidad didáctica. 161
5. Diseño de unidades didácticas en matemáticas 164

5.1 El Currículo oficial	165
5.2 Organización cognitiva de los contenidos	166
5.3 Las representaciones	168
5.4 Análisis fenomenológico de los conocimientos matemáticos	169
5.5 Los errores y dificultades. Datos sobre el aprendizaje.	171
5.6 La secuencia de aprendizaje	173
5.7 Materiales y recursos	174
5.8 El análisis didáctico	175
5.9 La perspectiva histórica.	176
6. Materiales y recursos en la planificación de una unidad didáctica.	184
ANEXOS:	**193**
Anexo A	194
Anexo B	197
Anexo C	207
Anexo D	228
Anexo E	254
Referencias Bibliográficas.	**261**

Tema 1.

ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL AULA

Este tema sirve de introducción al libro. En él se justifica el interés educativo de emplear materiales y recursos en la enseñanza de las Matemáticas. Para ello comenzamos por distinguir entre enseñar y aprender, argumentando que para aprender hay que "hacer" y los materiales y recursos permiten que el alumno haga. Más adelante, en este apartado distinguimos entre materiales y recursos.

A lo largo de este capítulo utilizamos la enseñanza y aprendizaje de las fracciones para poner ejemplos de materiales. El primero es el Libro de Fracciones.

En correspondencia a la diferencia entre enseñar y aprender hay que distinguir entre *actividades de enseñanza* y *actividades de aprendizaje*. Proponemos organizar actividades relacionadas entre sí, formando *tareas* que afrontan problemas concretos relacionados con el contenido que se pretende enseñar, y que están compuestas por actividades relativas a una misma situación de aprendizaje.

Según el tipo de actividades de enseñanza y aprendizaje se estará realizando un modelo de enseñanza u otro. Clasificamos las actividades de acuerdo con varios criterios y ponemos el ejemplo de una tarea de opinión.

Antes de introducir nuevos conceptos presentamos algunos materiales didácticos para la enseñanza y aprendizaje de las fracciones. Agrupamos los materiales en dos categorías, los que pretenden el aprendizaje de *conceptos* y los que promueven la *ejercitación de destrezas* de manera lúdica. Presentamos los materiales conceptuales para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. Tres de estos materiales son fáciles de construir a partir de unas imágenes que pueden fotocopiarse (Círculo de Fracciones, Diagrama de Freudenthal y Transparencias de Cuadrados). Posteriormente se presentan los materiales para ejercitar.

La enseñanza que utiliza materiales didácticos tiene que cambiar la disposición del aula, convertirla en taller o laboratorio de Matemáticas, con mayor protagonismo de la enseñanza indirecta, en la que el alumno desarrolla conocimientos a partir de su trabajo con materiales.

Finalmente sintetizamos el contenido del tema y las ideas más importantes y enunciamos actividades para profundizar en lo aportado en este capítulo.

1. ENSEÑAR Y APRENDER.

Figura 1. A: Bud Blake

Como aparece en la historieta de Bud Blake (1987), enseñar y aprender son cosas diferentes. El profesor *enseña* para que el alumno *aprenda*. Para aprender, el alumno escucha, copia, resuelve, actúa, y finalmente memoriza. Además tiene que ponerle nombre y saber cuándo debe usar lo aprendido, para utilizarlo cuando la situación lo requiera. Si lo emplea para resolver problemas reales, el alumno será competente para emplear lo aprendido. Si sólo las emplea cuando el profesor le pregunta, estará desarrollando aprendizaje meramente escolar.

En la viñeta se ejemplifica un aprendizaje escolar, en el que Tigre, el niño, dirá que el perro ha aprendido a hacer trucos si:

- Stripe hace gestos que no son habituales en un orden determinado

- Justamente cuando se lo sugiera él (Tiger).

El aprendiz hace gestos si mueve los músculos necesarios siguiendo una secuencia completa. Para responder a la llamada de Tigre, Stripe tiene que asociar su respuesta con los gestos de Tiger que lo reclaman (el estímulo).

El aprendizaje de las Matemáticas es más complejo que el del perro Stripe, tanto por la cualidad de ser racional del aprendiz humano, como por la complejidad del conocimiento matemático. Aprender Matemáticas no consiste sólo en memorizar una serie de destrezas sino en tener ideas, comprender conceptos para saber en qué ocasiones y con qué problemas se utilizan.

Para llegar a esto el que aprende tiene que llegar a crear la siguiente cadena de conductas:

Hacer – Interiorizar – Organizar – Retener – Identificar las condiciones – Recuperar

Por tanto para aprender hay que *hacer*. Desde lo más elemental que es repetir, a lo más complejo que consiste en enfrentarse a problemas y tratar de resolverlos. Tanto para recordar como para comprender, identificar, etc., es importante que el que aprenda **haga**. Un proverbio chino dice:

Oigo y olvido

Veo y recuerdo

HAGO Y **APRENDO**

Los educadores han inventado medios que facilitan que los alumnos actúen, hagan (primer eslabón de la cadena). Unos medios son específicos (programas informáticos didácticos, como el CABRI Géomètre o el más actual GEOGEBRA, o los Bloques Multibase de Dienes). Otros son instrumentos que se han empleado en algún momento histórico (como la regla de cálculo, hoy en desuso, que se puede emplear para la enseñanza de la aritmética), o con otras funciones (como el ábaco, que aún se utiliza para el cálculo aritmético). Estos medios que facilitan el hacer, son lo que llamamos MATERIALES Y RECURSOS para la enseñanza.

Carretero, Coriat y Nieto (1955), los definen de la siguiente forma:

RECURSOS:

Se entiende por recurso cualquier material, no diseñado específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, que el Profesor decide incorporar en sus enseñanzas.

MATERIALES:

Se distinguen de los recursos porque, inicialmente, se diseñan con fines educativos (Si bien, en general, un buen material didáctico transciende la intención de uso original y admite variadas aplicaciones; por ello, no hay una raya que delimite claramente qué es un material y qué es un recurso).

Los mismos autores ponen *ejemplos*:

RECURSOS:

La calculadora, la fotografía y diapositiva, la prensa, los programas y anuncios de radio y TV, los vídeos, programas de ordenador de propósito general (procesadores de texto, hojas de cálculo, editores de gráficos, gestores de bases de datos), los juegos, el retroproyector y la historia de las matemáticas

MATERIALES

Las hojas de trabajo preparadas por el profesor, los programas de ordenador de propósito específico (paquetes de estadística elemental, por ejemplo), materiales manipulativos, etc.

Cascallana (1988) llama *materiales estructurados* a los que estamos llamando *materiales,* y *no estructurados* a lo que llamamos *recursos*.

La historia de los materiales didácticos para la enseñanza de las Matemáticas no es reciente. El muy recomendable capítulo de Szendrei, en el Handbook (Bishop et all., 1996), hace un recorrido por el papel que han desempeñado los materiales en la enseñanza de las matemáticas. El artículo de Thompson, (1994) nos da una idea sobre el papel y las cualidades de los materiales.

Es recomendable mirar libros clásicos para darse cuenta de materiales específicos que fueron propuestos por sus autores, o que han sido adaptados por profesores creativos. Es de destacar el libro de D. Pedro Puig Adam (1958), en el que se muestran una gran cantidad de materiales para la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos. Puig Adam perteneció a la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas, en cuyos simposium presentó el material que aparece en su libro. Dicha Comisión editó las actas del segundo simposiun, en versión española de Gonzalo Medina (1964), donde se nos da una idea de los materiales que se estaban proponiendo en los años 60 del pasado siglo y que deberíamos retomarlos. En el texto se recogen las intervenciones de especialistas de siete países que estudiaron en conjunto el tema del material de enseñanza. Como se señala en el prólogo, la simple cuestión de la historia de la pizarra, útil fundamental de la enseñanza tradicional y moderna, es de tal magnitud que merecería un estudio por sí sola. Ello nos llama la atención sobre la importancia de los recursos, pues la pizarra es, junto al lápiz y papel y los útiles de dibujo, recursos tan extendidos para el estudio de las Matemáticas, que nos lleva a pensar en cómo sería la enseñanza sin su empleo.

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas organizó en Granada en el año 1998, un seminario sobre el empleo de materiales y recursos para la enseñanza de las matemáticas. Sus materiales de trabajo muestran un amplio abanico sobre este campo.

En la situación actual se nos abren nuevos recursos que tenemos que considerar en nuestra tarea docente. El artículo de Manolo Alcalá, de una de sus exposiciones en el Movimiento Cooperativo de Escuela Popular: http://www.quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_7/nr_111/a_1343/1343.htm, da un barrido interesante sobre el papel de los materiales. Puede ser ampliado con los textos de la colección síntesis (Hernán y Castillo, 1988 y Burgués y otros, 1988).

La pizarra es un recurso para *exponer* que debemos separar de recursos para *hacer*. Castelnuovo (1970) en otro libro fundamental para comprender el papel de los materiales de enseñanza, distingue entre materiales *colectivos*, cuya función es mostrar, de materiales *individuales* que permiten al niño hacer. Hay que reconocer que muchos materiales de los destacados en el texto de la Comisión Internacional son materiales colectivos. Entre ellos es de destacar la amplia muestra de filmes didácticos que ya existían en su época, para la enseñanza de las Matemáticas, y que se han ampliado notablemente en la actualidad, con la explosión de las nuevas tecnologías.

Los materiales y recursos permiten al profesor plantear tareas para que los alumnos utilicen los conceptos matemáticos. Así, por ejemplo, los alumnos ponen en juego su idea de polígono cuando tienen que resolver la tarea de *construir el polígono de mayor perímetro con el TANGRAM*. Fruto de esta tarea se replantean qué es un polígono, cuáles son aceptables, etc., lo que les obliga a acudir a la definición para poder llegar a resolver la tarea.

Por último destaquemos que los materiales y recursos sirven de soportes para que los alumnos actúen de manera práctica frente a los problemas que componen la tarea.

Actividades

1.1.A: Recordar recursos y materiales para la enseñanza de las Matemáticas. Distinguir cuáles son recursos y cuáles materiales.

1.1.B: Buscar en la red informática páginas de enseñanza de las Matemáticas y materiales y recursos.

1.1 UN MATERIAL: EL LIBRO DE FRACCIONES.

Para aclarar lo que es un material didáctico veamos un ejemplo relacionado con la enseñanza de las fracciones: El Libro de Fracciones. El más conocido está comercializado por Nardil SL.

El libro está formado por páginas divididas en partes mediante dibujos y cortes (figura 1.1.A) que representan fracciones. La hoja completa es la unidad. Debajo de estas hojas hay un segmento en el que se han representado las fracciones correspondientes. Tiene dos juegos de hojas que corresponden a fracciones con denominador potencias de 2 y las ligadas a las divisiones en tres partes.

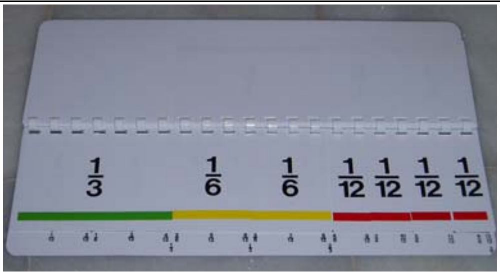


Figura 1.1.B: Tercios

Figura 1.1.A: Libro de Fracciones, Medios

Recomendamos al lector que reproduzca el libro de fracciones, busque formas de obtener fracciones equivalentes y operar con fracciones empleando el libro de fracciones. A continuación aparece una página que se puede fotocopiar y recortar, para hacer un Libro de fracciones (figura 1.1.C).

Ejemplos de actividades con el libro de fracciones son:

LF1- Obtener fracciones equivalentes.

LF2- Descomponer fracciones en varios sumandos, como: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3} y \frac{5}{6}$.

LF3- Estudiar cuántas veces una fracción contiene a otra. Por ejemplo, cuántas veces $\frac{1}{2}$ contiene a $\frac{1}{4}$. Cuántas veces $\frac{1}{4}$ contiene a $\frac{1}{2}$. Qué porción de $\frac{1}{3}$ es $\frac{4}{6}$. Cuántos sextos se necesitan para cubrir $\frac{2}{3}$ etc.

LIBRO DE FRACCIONES

$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

1

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

1

Figura 1.1.C: Páginas para hacer el Libro de Fracciones

2. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE: ACTIVIDADES Y TAREAS

Al diferenciar enseñanza y aprendizaje hemos distinguido lo que hacen los dos sujetos que intervienen, el alumno (aprende) y el profesor (enseña). En la figura 2.A reproducimos la situación que aparecía en la historieta de Blud Blake, distinguiendo lo que hacen uno y otro:

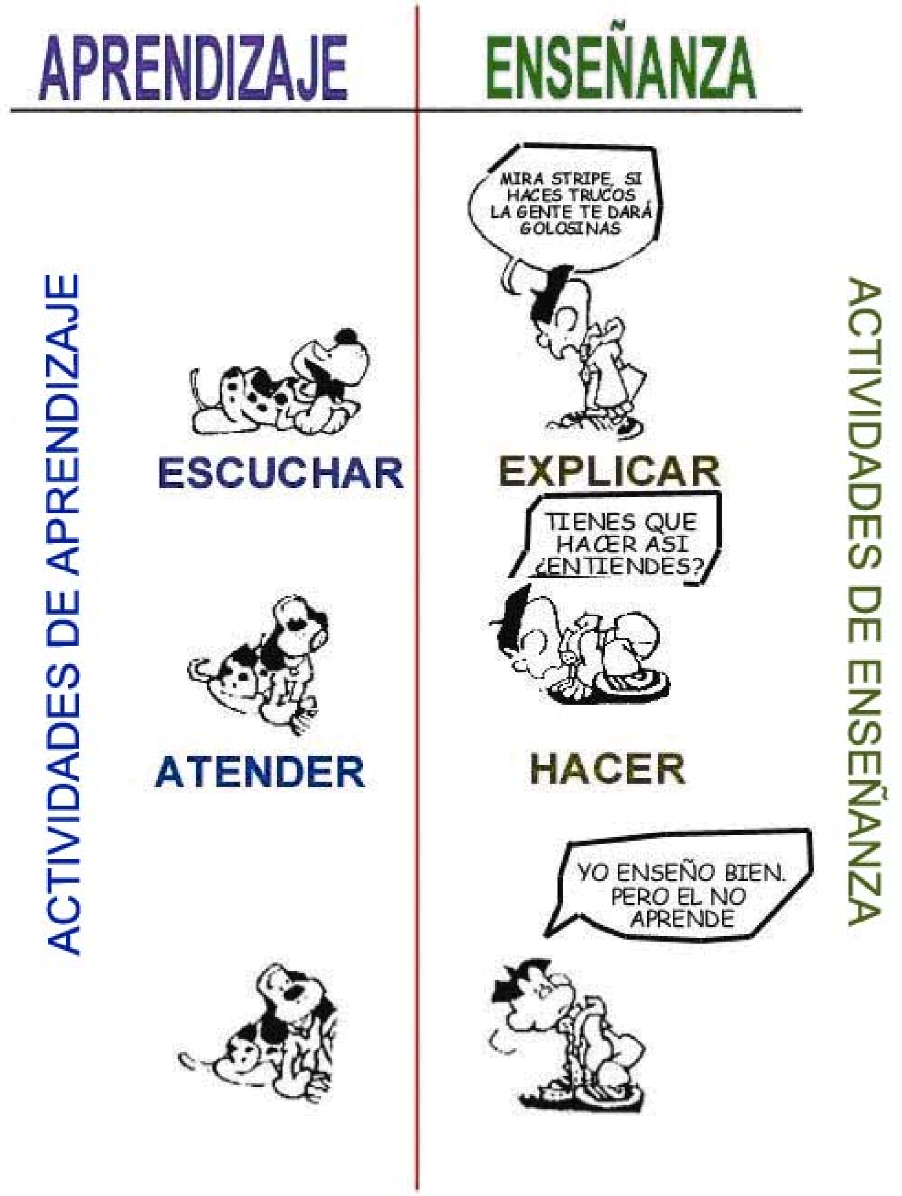


Figura 2.A

Mientras el “profesor” explica, hace, dice, el “alumno” escucha, atiende, mira. Vamos a llamar ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA a las acciones del profesor, y ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE a las del alumno. Ponte y otros (1997) señalan que: *La naturaleza de la actividad de los alumnos en el aula de Matemáticas es una cuestión central en la enseñanza de esta disciplina. Un aprendizaje de las Matemáticas es siempre el producto de actividades, y si éstas se reducen, por ejemplo, a la resolución repetitiva de ejercicios para aplicar ciertas fórmulas, eso será lo que aprenderán, y ello va a perdurar, es decir, aprender de memoria las fórmulas. Por tanto esta será la imagen que adquirirán de las Matemáticas.*

¿Cómo organizar las actividades para que los alumnos comprendan las matemáticas y las apliquen a resolver problemas, es decir, sean competentes? Ponte y otros (1997) sugieren organizar las actividades en TAREAS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE que utilicen las Matemáticas para resolver problemas con sentido.

Figura 2.B: Ferreres en El Periódico de Cataluña

La enseñanza de un contenido matemático por tareas, busca situaciones en la que se aplique el contenido. Por ejemplo, situaciones sobre el consumo del agua, como la de la viñeta de Ferreres (Figura 2.B), sirve para diseñar una tarea de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad. El estudio del consumo de agua en distintos países, sería la "situación de aprendizaje".

Cada **tarea de enseñanza** se compone de:

- Un contenido matemático
- Una situación de aprendizaje

Por ejemplo, para enseñar el Teorema de Pitágoras se puede *explicar desarrollándolo en la pizarra* (actividad de enseñanza), mientras los alumnos *escuchan, atienden y anotan* (actividades de aprendizaje). Una enseñanza basada en tareas propone secuencias de enseñanza y aprendizaje compuestas de varias actividades relacionadas que sean problemas significativos en los que se aplica. Es por ello que hay que añadir al contenido matemático la situación de aprendizaje. Se buscan las situaciones de aprendizaje entre las situaciones cotidianas, científicas o técnicas en las que se aplica el Teorema de Pitágoras. Como sabemos el Teorema de Pitágoras es una condición métrica necesaria y suficiente para que tres segmentos formen un triángulo rectángulo, por lo que se puede aplicar para:

- Determinar la longitud de un lado de un triángulo rectángulo, conocidos los otros dos lados

- Averiguar si tres segmentos forman un triángulo rectángulo

- Construir ángulos rectos

También se puede interpretar el Teorema de Pitágoras como una relación métrica entre las áreas de figuras semejantes construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo. En estas condiciones se puede emplear para determinar el área de una figura conocidas las de otras, estudiar si son semejantes, etc. Analizar las funciones del Teorema de Pitágoras es establecer la *fenomenología del concepto* (Rico, 1997). Al estudiar la fenomenología completamos el análisis de concepto con la búsqueda de situaciones y contextos en que se utiliza. En el caso del Teorema de Pitágoras, determinar longitudes y ángulos son funciones útiles para la construcción y carpintería (dibujar una planta rectangular, estudiar si forman ángulo recto paredes, o un estante con la pared), topografía (determinar distancias entre puntos, en un plano, alturas inaccesibles, etc.), y otros campos científicos (composición de fuerzas, por ejemplo).

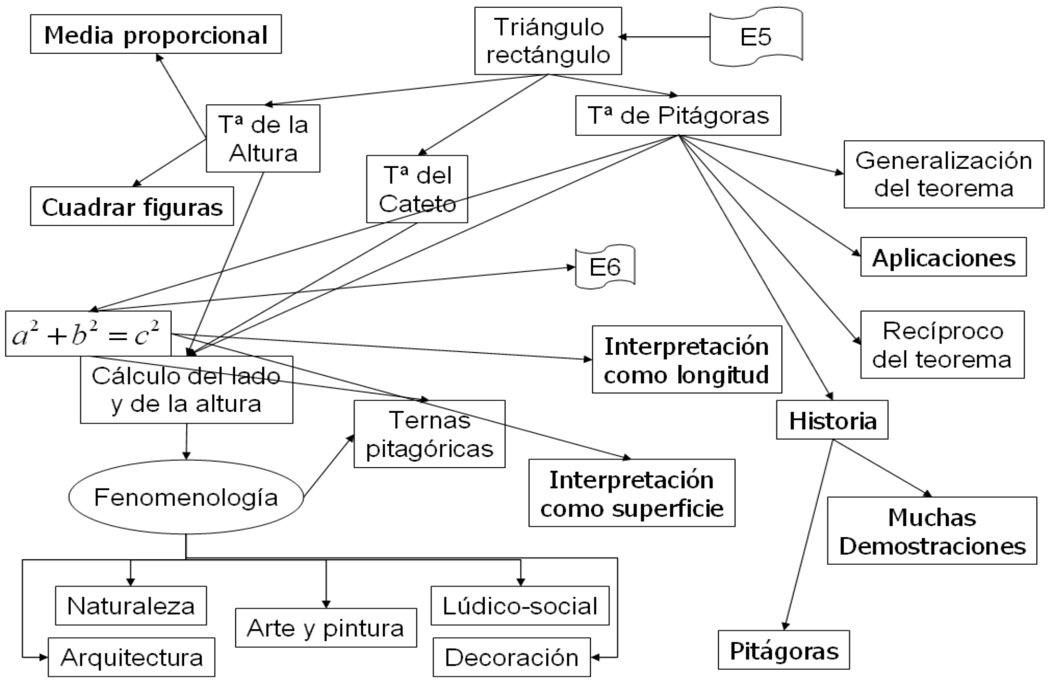


Figura 2.C. Fenomenología T. Pitágoras

En la figura 2.C, aparece un mapa conceptual elaborado por alumnos de la asignatura Didáctica de la Matemática, en el que se aprecia un estudio fenomenológico del Teorema de Pitágoras.

Ejemplo de tarea para enseñar el Teorema de Pitágoras es la siguiente:

EJEMPLO: *Dibujar una cancha de tenis en el patio del colegio*.

- El contenido matemático es el Teorema de Pitágoras

- La situación de aprendizaje se sitúa en el ambiente escolar, con una intención técnico-práctica, afectando, por ejemplo, a los alumnos o al profesor de Educación Física: dibujar de una cancha de tenis en el patio del colegio. Para precisar la situación hay que aclarar en qué condiciones se va a realizar: con qué materiales contamos, cómo está el suelo sobre el que se va a construir, etc.

A partir de ahí podemos diseñar las actividades de enseñanza y aprendizaje. Las de enseñanza comenzarán con la introducción para presentar la tarea. Posteriormente se plantea la situación. Actividades de aprendizaje son las que realizan los alumnos de manera real sobre el suelo (medir con cinta métrica, buscar propiedades que permitan construir líneas rectas en el suelo, líneas paralelas y perpendiculares, manejar los utensilios para dibujar la línea de partida, aplicar las propiedades para obtener la longitud de diagonales de algunos rectángulos para que guarden cierta perpendicularidad, buscar propiedades prácticas para estudiar si las líneas son razonablemente rectas, paralelas y perpendiculares, aplicarlas, etc.). Se completan con actividades de aprendizaje en las que los alumnos redactan un informe final describiendo el proceso seguido, las propiedades matemáticas empleadas y las conclusiones que han extraído.

Por tanto para indicar la tarea necesitamos precisar el ***contenido matemático*** y la ***situación de aprendizaje***.

Pero además necesitamos clarificar y decidir las actividades que va a realizar el alumno como consecuencia de dicha tarea.

En resumen:

Nos parece que la enseñanza debe basarse en TAREAS DE ENSEÑANZA. Una Tarea de Enseñanza consiste en una secuencia organizada de actividades encaminadas a un fin, que tienen sentido completo, presentando situaciones en las que el aprendizaje cobra sentido.

Las Tareas de Enseñanza se componen de una serie de Actividades de Enseñanza. Cada actividad de enseñanza provoca una serie de Actividades de Aprendizaje en los alumnos.

2.1 TIPOS DE ACTIVIDADES Y TAREAS.

Lo que diferencia el modelo de enseñanza que desarrollamos es el tipo de aprendizajes que pretendemos, y con ello las actividades de enseñanza y aprendizaje que tienen lugar en nuestra clase (Flores, 2001).

Vamos a clasificar las actividades de enseñanza atendiendo a lo que pretendemos que los alumnos aprendan. Para ayudarnos a clarificar el tipo de aprendizaje vamos a diferenciar tipos de actividades de enseñanza:

Tipos de actividades de enseñanza

De memoria: *Su fin es promover que los alumnos realicen actividades de aprendizaje que le lleven a almacenar, reconocer y/o reproducir información*

De rutina o de procedimientos*: Su fin es promover que los alumnos aprendan a aplicar procedimientos estandarizados o algoritmos*

De comprensión o entendimiento*: Su fin es que los alumnos:*

Transformen versiones de la información

Organicen la información y la relacionen con otra

Decidan sobre qué procedimientos se pueden aplicar

Apliquen procedimientos a nuevos problemas

De resolución de problemas*: Su fin es que los alumnos desarrollen destrezas para resolver problemas, identifiquen datos e incógnitas, los organicen, relacionen con procedimientos conocidos, seleccionen estos procedimientos y los apliquen, además de interpreten el resultado*

De opinión*: Su fin es promover que los alumnos examinen sus preferencias y posiciones sobre algo, las expresen, las relacionen con las preferencias de otros y extraigan conclusiones más fundamentadas*

Las actividades de enseñanza y aprendizaje que utilizan materiales y recursos pueden ser de cualquiera de los tipos anteriores.

Ejemplos de Tipos de actividades de enseñanza y aprendizaje empleando materiales y recursos

De memoria: *En un* ***reproductor de música*** *suena la canción de las tablas de multiplicar del grupo Parchís, y los alumnos la cantan con el grupo*

De rutina o de procedimientos*: Los alumnos juegan al* ***dominó de fracciones****, efectuando mentalmente o con papel y lápiz los algoritmos de las operaciones con fracciones.*

***De comprensión o entendimiento**: Con el **diagrama de Freudenthal** los alumnos encuentran relaciones entre fracciones, las escriben en forma de operación y con palabras*.

***De resolución de problemas**: Los alumnos estudian qué porción de $\frac{3}{4}$ de litro es $\frac{1}{5}$ de litro, comparan capacidades, buscan modelos para representarlas, las comparan, traducen a operaciones e interpretan el resultado*

***De opinión:** Los alumnos examinan viñetas humorísticas sobre las fracciones, en ellas buscan las unidades de referencia y estudian la situación que se plantea. Posteriormente elaboran una narración sobre la situación planteada y la cuentan a sus compañeros*

En este libro presentamos materiales y recursos válidos para muchas clases de actividades de enseñanza y aprendizaje, deteniéndonos especialmente en las que buscan que los alumnos comprendan un concepto.

La enseñanza en la que predominan tareas de enseñanza mecánicas (de memoria y rutina), es más formal, dirigida a aprender destrezas mecánicas, produciendo un aprendizaje basado en la memoria.

Una enseñanza para hacer alumnos matemáticamente competentes, esto es, que aprendan a tomar decisiones, generen hábitos de aprendizaje, se capaciten para desenvolverse en situaciones nuevas, etc., utilizará actividades de enseñanza que promuevan que el alumno participe, con actividades de aprendizaje abiertas, que aborden contenidos complejos, que tengan que formularlos verbalmente para compartirlos con sus compañeros.

Para ello sugerimos que la enseñanza esté basada en Tareas de Enseñanza, centradas en situaciones problema en las que sea necesario el contenido matemático, como una herramienta para resolverlas. Las actividades estarán organizadas en un todo, mostrando la matemática como actividad humana.

En el ejemplo siguiente la situación de aprendizaje es la utilización del conteo para marcar un tiempo de espera. El contenido matemático son las características de los números racionales. Se ha empleado como recurso una viñeta humorística.

EJEMPLO: *Una tarea de opinión con viñetas humorísticas*

Contar para no llegar nunca

Figura 2.1.A: Chris Brown, *El Correo de Andalucía*

En grupos de 4 alumnos, responder por escrito a las siguientes cuestiones.

a) **Descripción de lo que ocurre**:

a.1: Relatar situaciones que hayáis vivido en la que se utilice un número para esperar, con una frase similar a la de la historieta.

a.2. Describir brevemente la historia que se presenta

a.3: Describir las intenciones del protagonista de la historieta y la estrategia que utiliza para conseguirlo.

a.4: Indicar qué es lo que sorprende de la viñeta, lo que la hace graciosa.

b) **Explotación didáctica:**

Estudiar cuántos números tiene que decir Chiripa antes de atacar. Analizar estos números (tipo, características, etc.). Estudiar qué números tendría que decir para alargar el tiempo de espera. Determinar el tiempo que se emplea en decir cada número y con ello calcular el tiempo que tardarán en atacar. Buscar o inventar otras viñetas humorísticas que traten el problema del conteo. Analizar las propiedades que tienen que tener los números para poder contar con ellos.

Indicaciones para el profesor

Realizar una puesta en común de las respuestas de los alumnos a la explotación didáctica, profundizando en las características de los números racionales. Poner de manifiesto las cualidades de los “números para contar”, intercalando preguntas como *¿se pueden emplear los números racionales para contar las páginas de un libro? ¿Por qué?* Aludir a la densidad de los racionales, la inexistencia de “siguiente de”, la diferencia entre conjuntos continuos y discretos, inexistencia de primer elemento ..etc..

Si disponemos de un grupo de alumnos adecuado, podemos detenernos en el subconjunto de racionales que aparece en la viñeta, que puede utilizarse para contar utilizando como unidad 1/8. En este subconjunto se puede sumar y restar como en N. Estudiar conjuntos como este permite llegar a interpretar los racionales como naturales con una unidad distinta (como si nuestro sistema monetario no necesitara los números racionales, ya que se expresa con cantidades naturales de céntimos).

En la Enseñanza Secundaria Obligatoria se puede utilizar la *progresión* de términos enunciados por Chiripa, analizar su correspondencia con los naturales, estudiando la relación entre una progresión aritmética y sus subíndices (el número de términos, término de lugar…, etc.).

En fin, se puede cerrar la tarea estimulando a que los alumnos encuentren semejanzas y diferencias entre los conjuntos numéricos respecto al hecho de contar (existencia de primer elementos, existencia de siguiente, densidad, referencia a una unidad, etc.).

Para completar la explotación matemática y didáctica del humor, sugerimos a los alumnos que busquen otras viñetas humorísticas sobre contar y sobre los números racionales.

Después de la puesta en común, cada grupo de alumnos elaborará un **informe final**, resumiendo la historia y estudiando propiedades de los números con los que se puede contar.

En los siguientes artículos y documentos se amplia la visión sobre el papel del humor en la enseñanza de las matemáticas (Flores, 2003a y b, 2004a y b, Guitart- Coria y Flores, 2011 y Guitart-Coria, 2010, entre otros).

2.2. MATERIALES PARA LA ENSEÑANZA DE FRACCIONES.

Para ejemplificar los conceptos tratados en este capítulo nos hemos centrado en la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales y **las fracciones**. Los hemos elegido por tratarse de un concepto complejo, que acarrea fracaso escolar y que se extiende a lo largo de toda la enseñanza obligatoria.

Para facilitar su comprensión comenzamos por plantear un problema. Su resolución lleva a distinguir el concepto de operación con fracciones de los procedimientos algorítmicos para obtener su resultado.

Problema

Se dispone de 4 pasteles y se le quiere dar a cada niño 3/5 de pastel. ¿A cuántos niños se les dará pastel? ¿Cuánto sobra?

La resolución puede hacerse de dos maneras:

i) 4 = 20/5 | 3/5
2/5 6

ii) 4 : 3/5 = 20/3 = 6 + 2/3

Cada operación genera una respuesta que no son iguales:
i) Se da pastel a 6 niños y sobran 2/5
ii) Se da pastel a 6 niños y sobran 3/5

Buscar explicaciones para resolver esta discrepancia en las soluciones Identificar los conceptos matemáticos que se utilizan en el problema y estudiar sus propiedades, hasta llegar a interpretar el problema y las soluciones, así como las operaciones realizadas.

Recomendamos tratar de resolver el problema antes de seguir leyendo y buscar una explicación satisfactoria al mismo.

Si se estudia el problema planteado empleando sólo los conceptos formales implicados, habrá que analizar qué papel juegan los dos algoritmos de la división que aparecen, cuál es adecuado y en qué condiciones.

Sólo si al resolverlo mediante acciones sobre representaciones plásticas de las cantidades se llegará a comprender mejor en profundidad el dilema creado y a dar una mejor interpretación del mismo. En estas condiciones se pueden abordar cuestiones más profundas, como por qué no se lleva a cabo una división entera entre números racionales, cuáles son las unidades de los factores de una división, cómo se calcula el resto en una división entre racionales, etc.

Esperamos que esta reflexión haya servido al lector para reflexionar sobre el papel clarificador que pueden desempeñar las representaciones y materiales didácticos en la enseñanza de los números racionales. Una vez hecha esta primera reflexión, podemos avanzar hacia el estudio de estos materiales y recursos.

Cuando el profesor afronta la enseñanza de las fracciones tiene que revisar, en primer lugar, las directrices que se plantean en los decretos de enseñanza, sabiendo qué corresponde a cada ciclo educativo.

A continuación se examinan los materiales y recursos adecuados para desarrollar los currículos. Para la enseñanza de las fracciones, requerimos materiales y recursos para examinar qué representan las fracciones, cómo relacionarlas con situaciones cotidianas, estudiar qué significan sus operaciones y cómo se hacen de manera práctica. Diversos documentos nos dan ideas sobre la enseñanza de las fracciones (Alcalá 1986 y 2001, Llinares y Sánchez, 1991 y Grupo del APMA, 1984), y sobre materiales Coriat (1989).

Para la enseñanza de los números racionales se pueden emplear recursos clásicos que tienen otras finalidades, como el TANGRAM, o Los Números en Color o Regletas de Dienes que fueron muy utilizadas en Educación Infantil. En este capítulo vamos a referirnos a recursos específicos para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, distinguiéndolos en dos tipos:

- Los materiales y recursos **conceptuales,** que permiten expresar fracciones y comparar, relacionar y realizar operaciones de manera manipulativa.

- Otros materiales para **ejercitarse**, que crean condiciones lúdicas para motivar a los alumnos a trabajar con fracciones, aunque tiene que realizar aparte, por otros medios, los cálculos que requieren.

Entre los **materiales conceptuales** nos detenemos en el Círculo de Fracciones, Diagrama de Freudenthal o Muro de fracciones y las Transparencias de Cuadrados (y Demostración Fracciones).

Entre los **materiales para ejercitarse** vamos a ver el Dominó de Fracciones y la Baraja de Fracciones.

Actividades

1.2.2.A. Identificar los términos que no son familiares en el Currículo de Matemáticas del Ministerio referidos a fracciones, y buscar documentos para profundizar en ellos.

1.2.2.B. Examinar las lecciones dedicadas a fracciones en libros de texto de Matemáticas de la ESO y estudiar si se adaptan al Currículo del MEC.

1.2.2.C. Hacer una búsqueda informática de materiales y recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones.

Círculo de fracciones

En el anexo A.1 aparecen las dos piezas que componen el Círculo de Fracciones. Recomendamos al lector fotocopiar y recortar los dos círculos (amarillo y azul), cortar el radio que aparece en blanco en cada uno e insertarlos, de manera que se puedan girar. Con este sencillo instrumento se pueden representar fracciones del círculo unidad.

Con el Círculo de Fracciones se realizan las actividades siguientes:

CF1: Identificar qué fracciones aparecen indicadas en el Círculo y qué fracciones corresponden a las marcas sin nombre

CF2: Identificar qué fracciones equivalentes aparecen en el Círculo

CF3: Representar diferentes fracciones empleando el Círculo

CF4: Estimar una fracción determinada de manera directa o inversa. Para ello colocar los círculos de manera que no veas los números:

a) Pensar en una fracción y tratar de construirla sin emplear las marcas. Contrastar posteriormente la estimación mirando los números

b) Colocar (o dar a alguien para que lo haga) una porción y tratar de identificar la fracción a la que corresponde. De nuevo se puede comprobar la precisión de la estimación dándole la vuelta al Círculo

CF5: Realizar operaciones empleando el Círculo de Fracciones.

Materiales conceptuales: Diagrama de Freudenthal (Muro de fracciones) y Puzzle de Fracciones

El Diagrama de Freudenthal o Muro de Fracciones, consiste en un rectángulo dividido en franjas, cada una de ellas representando una unidad, que se encuentran divididas en distintas porciones. Con él se pueden comparar fracciones, estudiar la relación que existe entre ellas y realizar operaciones.

En el Anexo A.2 aparece el Muro de Fracciones. Recomendamos fotocopiarlo para realizar las siguientes actividades:

DF1: Identificar cada trozo

DF2: Buscar fracciones equivalentes

DF3: Pensar en formas de ordenar fracciones

DF4: Buscar estrategias para realizar operaciones con fracciones.

Veamos por ejemplo, cómo se puede hacer la multiplicación:

a) Con numeradores unitarios, por ejemplo $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \text{mitad de } \frac{1}{3}.$$

Por tanto se divide por la mitad una de los rectángulos que representan tercios y se busca con qué otra división coincide.

b) Numeradores no unitarios, por ejemplo $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}$:

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4} = 2 \text{ veces la tercera parte de } \frac{1}{4}.$$

Habrá que obtener la tercera parte del rectángulo de los cuartos, repetirlo dos veces y buscar con qué división coincide.

DF5: Buscar estrategias para demostrar igualdades y desigualdades con sumas y restas de fracciones, empleando el Muro.

El Puzzle de Fracciones

Una variante del Muro de Fracciones es el **Puzzle de Fracciones**, que consiste en un Diagrama de Freudenthal en madera, con los trozos divididos (figura 2.2.A).

Figura 2.2.A: Puzzle de Fracciones

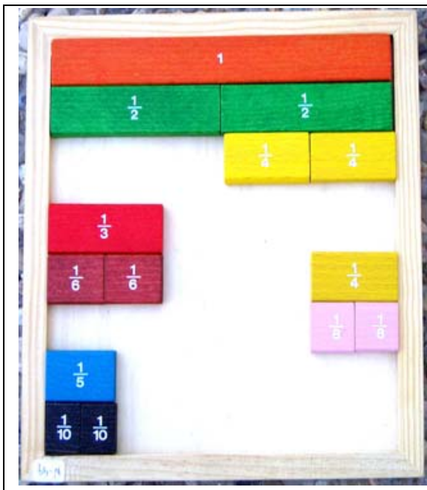


Figura 2.2.B: Sumas

La ventaja de este puzzle es que se pueden mover las piezas y así realizar físicamente la suma y resta de fracciones.

Por ejemplo se pueden buscar todas las combinaciones de fracciones que, al sumarlas dan lugar a otro trozo o fracción, tal como aparece en la figura 2.2.B.

Recomendamos al lector estudiar otras actividades que pueden plantearse con este material. Es interesante identificar qué se está haciendo en las figuras 2.2.C, D, E y F.

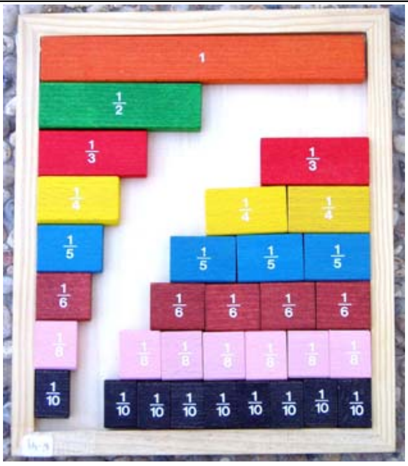


Figura 2.2.C: Desigualdades

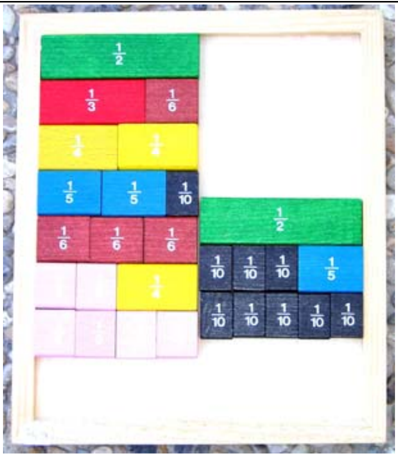


Figura 2.2.D: Igualdades

Figura 2.2.E: Estimación

Figura 2.2.F: Desigualdad

Con el Muro y el Puzzle podemos abordar la siguiente tarea:

EJEMPLO: *Establecer relaciones entre fracciones y expresarlas por medio de operaciones con fracciones.*

Tomemos el Muro de Fracciones. Si queremos obtener las mitades de cuartos podemos ir buscando en las bandas inferiores para ver cuál de ellas hace que las divisiones de los cuartos queden divididas en dos partes. Así identificaremos la Tabla de octavos.

Este resultado lo podemos expresar por medio de varias operaciones.

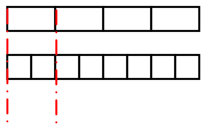
- *Obtener la mitad es dividir por 2, luego* $\frac{1}{4}:2=\frac{1}{8}$

- *"Hacer la mitad" es "hacer un medio de", luego la operación es:* $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

- *Si uno es la mitad del otro, su división es 2, es decir:* $\frac{1}{4}:\frac{1}{8}=2$

- *O sea uno es doble del otro:* $2\times\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

Recomendamos ejercitarse, utilizando el Muro o el Puzzle de Fracciones para encontrar fracciones que están en una relación dada con otra, para traducir estas relaciones en operaciones y por medio de frases, en los siguientes ejercicios de fracciones.

Expresión verbal	*Representación en Muro de Fracciones*	*Expresión con operaciones*	*Frases derivadas*
(Ejemplo) *La mitad de* $\frac{1}{4}$ *es* ___		$\frac{1}{4}:2=\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}:\frac{1}{8}=2$ $2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$	*La mitad de* $\frac{1}{4}$ *es* $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ *de* $\frac{1}{4}$ *es* $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$ *cabe 2 veces en* $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ *contiene 2 veces a* $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ *es el doble de* $\frac{1}{8}$
La cuarta parte de $\frac{3}{8}$ *es* _________			
$\frac{1}{2}$ *contiene* ___ *veces a* $\frac{1}{6}$			
_____ *está contenido 4 veces en* $\frac{1}{2}$			
$\frac{4}{12}$ *es esquivalente a* _____			
____________ *es equivalente a* $\frac{3}{4}$			
La suma de $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ *equivale a* ________			

Materiales conceptuales: TC: Transparencias de Cuadrados y Demostración Fracciones

Las Transparencias de Cuadrados consisten en dos hojas con el mismo dibujo, una impresa en transparencia y la otra en papel opaco. En ellas se han dibujado cuadrados divididos en diferentes porciones iguales.

En el anexo se encuentra el archivo con las Transparencias de Cuadrados. Recomendamos al lector imprimirlo en transparencia y en papel opaco, para realizar las siguientes actividades:

TCD1: Identificar las fracciones que aparecen en las hojas y todas las que puedes obtener en ellas.

TCD2: Buscar estrategias para obtener fracciones equivalentes empleando las Transparencias.

TCD3: Realizar operaciones con fracciones empleando las Transparencias: suma, resta, multiplicación de una fracción por un natural, multiplicación de fracciones, división de una fracción entre un natural y división de fracciones.

TCD4: Hacer un esquema con todas las operaciones que se pueden realizar empleando las Transparencias, describiendo los procesos realizados.

Con el Muro de Fracciones y los materiales similares se puede llevar a cabo la multiplicación de fracciones concebida como *fracción de fracción*. En ella la primera fracción actúa como operador, tras aplicar la segunda ("$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$" se identifica como "$\frac{1}{2}$ de lo que resulta de $\frac{1}{3}$").

Con las Transparencias de Fracciones se emprende la multiplicación combinatoria, que es la que lleva a obtener el área de un rectángulo de lados fraccionarios. Así "$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$" sería "*el área de un rectángulo de lados* $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$". Para calcularla se toma el cuadrado dividido en medios y se cruza con el dividido en tercios. Aparece un cuadrado dividido en sextos, en el cual es posible identificar el rectángulo pedido y darse cuenta de qué porción es del original, tal como se aprecia en la figura 2.2.G.

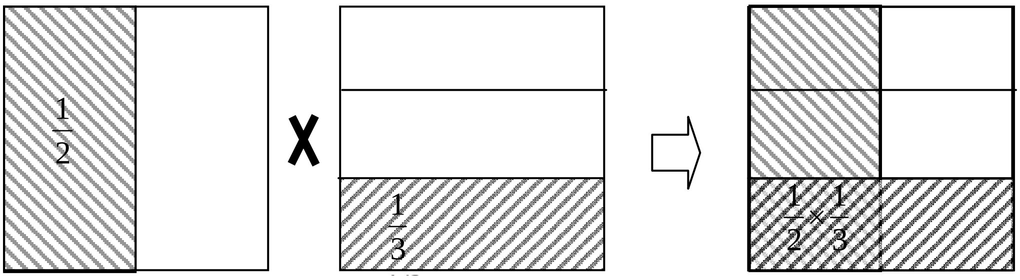


Figura 2.2.G: Multiplicación de un medio por un tercio con Transparencias

Sugerimos al lector buscar estrategias para hacer divisiones de dos tipos:

- Comparar partes

¿Cuántas veces $\frac{1}{2}$ *contiene a* $\frac{1}{3}$*?*

- Operación inversa de la multiplicación que obtiene el área

¿Qué mide el lado de un rectángulo que tiene de área $\frac{1}{6}$ *si uno de sus lados mide* $\frac{1}{2}$*?*

Demostración Fracciones

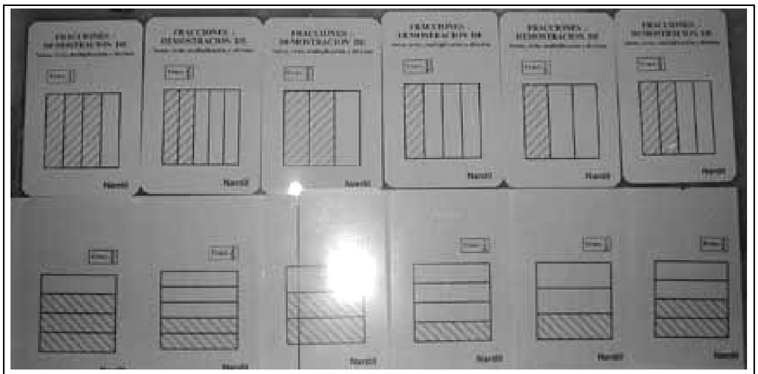


Figura 2.2.H: Demostración Fracciones

Una variante de las Transparencias de Cuadrados es el juego comercializado por Nardil SL, **Demostración Fracciones**, que aparece en formato de baraja.

Cada carta de la baraja es un cuadrado dividido en fracciones. Unas cartas son opacas mientras que otras son transparentes. En las opacas se representa la división del cuadrado con segmentos verticales, mientras que las transparentes las representa por segmentos horizontales. En la figura 2,2,H aparecen algunas de ellas.

La utilidad es muy parecida a las Transparencias, por lo que dejamos a la imaginación y estudio del lector discriminar estos dos materiales.

Materiales para ejercitarse en las fracciones: BF: Baraja de Fracciones

Hay diversas barajas de fracciones. En todas ellas las cartas tienen dibujadas fracciones mediante alguna forma de representación. Unas mediante áreas o longitudes. Otras mediante porciones de conjuntos discretos (un conjunto de canicas, por ejemplo). Otras las representan de forma numérica (*numerador/denominador*), o en forma de porcentajes y decimales. Están comercializadas por diversas firmas, entre ellas Nardil SL, y Proyecto Sur. Es fácil fabricarse una baraja, sin más que decidir los palos (las formas de representación - áreas de rectángulos, longitudes, representación fraccionaria, porcentajes-) y las 10 cartas de cada palo. Y … a jugar. Se pueden adaptar los juegos clásicos de baraja: *buscar parejas*, *escoba-arrastre*, *juntar familias*, etc. Con una baraja comprada sugerimos las siguientes actividades:

BF1: Identificar las fracciones que aparecen en la baraja, comparar las cartas con las de una baraja española o francesa y organizarlas.

BF2: Jugar a la “*escoba*” empleando la baraja. Para ello repartir 5 cartas por jugador dejando 4 cartas en la mesa boca arriba. Por turnos, un jugador echa carta a la mesa y se puede llevar (barrer) las de la mesa cuando entre la que echa y las que retire suman exactamente la unidad. Si no logra barrer simplemente echa una carta en su turno. Cada vez que se echa una carta se retira otra del mazo. Gana el que consigue barrer más cartas, una vez terminado el mazo. Se pueden plantear variaciones, primando algunas características, como conseguir la unidad por más de dos cartas, por ejemplo.

BF3: Inventar otros juegos que requieran utilizar otras operaciones con fracciones.

Como se puede comprobar, al jugar con estas barajas hay que efectuar las operaciones mentalmente o calculando con lápiz y papel. Los alumnos que juegan con ella tienen que saber obtener las operaciones mediante otros procedimientos. Para ello pueden completarse empleando otros materiales conceptuales que le permitan realizar las operaciones.

Estos materiales sirven para que los alumnos realicen operaciones de una manera lúdica, aunque puedan limitarse a resolverlas de manera algorítmica.

Existen otros juegos de barajas de fracciones. Recomendamos las que aparece en uno de los primeros números de la revista Suma, en un artículo de Moisés Coriat [Coriat, M. (1989). Baraja de Fracciones. *SUMA 3*, 69-72]. En cada naipe de esta baraja aparecen varias representaciones de una fracción. La baraja se enriquece con el aporte de cartas en blanco que puede rellenar el alumno, con lo que trabaja la equivalencia entre las formas de representación. En el artículo se sugieren juegos.

Materiales para ejercitarse en las fracciones: Dominós de Fracciones

El Dominó de fracciones se diferencia del dominó clásico en que las caras de las fichas contienen fracciones representadas de diversas formas. Sugerimos al lector diseñar uno específico para cada finalidad. En sus caras pueden presentarse operaciones con fracciones, representaciones de las fracciones, nombres de las fracciones e incluso enunciados de ejercicios de operaciones con fracciones (por ejemplo, *la mitad de un tercio*).

Existen dominós de fracciones que están comercializados, pero no todos guardan la estructura de dominó. Es recomendable trabajar con los que guarden la misma estructura del dominó clásico, es decir aquellos que tengan la misma cantidad de números distintos (fracciones en este caso) combinadas entre sí. En el dominó clásico hay siete caras diferentes (0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6) combinadas de dos en dos todas ellas, hasta completar 28 fichas. Cada número está representado por el mismo dibujo. Sin embargo en el dominó de fracciones es conveniente utilizar diferentes representaciones de las fracciones con objeto de hacerlo más instructivo.

Recomendamos al lector construir un dominó o conseguir uno y realizar las siguientes tareas:

DF1: Identificar las piezas y las fracciones. Compárarlo con un dominó clásico.

DF2: Clasificar las piezas como en un dominó de números

DF3: Jugar al dominó con otros compañeros, utilizando las reglas clásicas del dominó

DF4: Jugar al solitario con el dominó. Se invierten las piezas y se barajan. Se colocan ahora en filas decrecientes (7, 6, 5, 4, 3, 2 y 1). Utilizando como referencia esta representación, se coloca la pieza que ha quedado suelta (la última) en el lugar que le correspondería, sabiendo que las 7 de la primera fila están ordenadas desde la menor a la mayor, las 6 de la segunda igual, etc. Levantar para ello la que ocupa su lugar y buscar el de ésta, y así sucesivamente. Se gana el solitario cuando se consigue colocar todas las piezas antes de que salga la correspondiente a la última ficha.

DF5: Inventar otros juegos que requieran utilizar otras operaciones con fracciones.

Igual que sucedía con la baraja, para jugar con el dominó hay que realizar las operaciones mediante procedimientos ajenos al juego (aplicar el algoritmo, cálculo mental, calculadora, etc.). Por tanto puede complementarse empleando otros materiales conceptuales con los que hacer las operaciones.

Los materiales presentados en este epígrafe sirven para que los alumnos realicen operaciones de una manera lúdica, aunque puedan limitarse a resolverlas de manera algorítmica.

3. LOS MEDIOS: EL AULA COMO LABORATORIO, TALLER DE MATEMÁTICAS

En los apartados anteriores hemos presentado algunas actividades para manejar las fracciones empleando materiales didácticos. En ellas se observa que hemos enfatizado los materiales conceptuales, proponiendo actividades para que los alumnos manejen los conceptos (fracción, operaciones con fracciones, orden, equivalencia), utilizando diversas formas de representarlas. Hemos dado menos importancia a las actividades dirigidas a aprender los algoritmos.

Al emplear materiales y recursos en la enseñanza de las matemáticas se altera el modelo habitual de clase, dando lugar a nuevas características. Resumamos algunas:

- La clase adquiere el modelo de **laboratorio**: los alumnos actúan para resolver situaciones problemáticas, pueden moverse, manipulan, etc., según las características del material empleado.

- Las únicas limitaciones se establecen por el propio material y las condiciones del grupo clase.

- Manipular el material tiene una intención didáctica que es provocar el aprendizaje matemático. Para ello el **material** tiene que ir **acompañado de unas actividades** bien diseñadas que los alumnos tienen que realizar.

- La enseñanza y el aprendizaje comienzan por la resolución de problemas prácticos (no siempre del mundo cotidiano). Sólo después de la resolución se puede llegar a formular las definiciones y propiedades de los conceptos matemáticos. Por tanto se trata de una **enseñanza y aprendizaje indirectos**, pues los alumnos aprenden al hacer, cuando van generando destrezas para resolver los problemas, organizando esas destrezas de una manera sistemática que le permita afrontar problemas más complejos.

- Cuando trabajan con los materiales para realizar las actividades los alumnos tienen **libertad de actuación**. Sólo se corrigen aquellas conductas que pueden deteriorar el material, que molestan a los compañeros o que pueden distraer la atención. Por tanto **no se evitan los errores** o los caminos infructuosos.

- Como la actuación se presta a interpretaciones individuales el trabajo se complementa con una **puesta en común** de los resultados obtenidos, con lo que se obliga a que justifiquen, validen y formulen las apreciaciones que se han realizado.

El **laboratorio de matemáticas** tiene que ser similar a otros laboratorios, es decir, en él se plantean y resuelven situaciones interesantes, empleando medios adecuados y permitiendo la creatividad. En el laboratorio el conocimiento formal se utiliza cuando se necesita, pues lo más importante es el problema que se quiere resolver. Al utilizarlo el alumno se familiariza con él, lo interpreta, le da sentido y de ahí surge aprendizaje. Por tanto en un laboratorio se enseña y aprende, siendo este aprendizaje una consecuencia de la acción. Decimos que se promueve un aprendizaje indirecto, que se opone al modelo tradicional directo, en el que se presenta el contenido antes de resolver las situaciones para las que se ha creado.

El aprendizaje directo se asocia con la memorización de definiciones y procedimientos. En el indirecto se aprende haciendo, aunque después haya que memorizar de manera sistemática, para recordar el procedimiento.

Partimos de que el que aprende es el alumno. Pero cada alumno tiene unos hábitos particulares e interpreta las instrucciones de manera diferente. Por todo ello las tareas propuestas con materiales y recursos están menos reguladas que cuando tiene protagonismo el profesor. Se puede interpretar que muchas de estas tareas son de investigación y opinión, por lo que tenemos que establecer algún tipo de control que ayude a compartir lo aprendido, dándole los límites que establezcan su formulación, justificación y fundamentación. Por ello deben completarse mediante la realización de puestas en común para obligar a expresar lo aprendido y darle forma que permita su retención y recuperación, cuando sea necesario.

Esperamos que estos conceptos se vayan afianzando conforme avancemos en el libro.

Actividades

1.3.A: Estudiar algunas características que tiene que tener el aula de clase en una enseñanza que utilice los materiales trabajados en este tema:

- *Círculo de Fracciones*
- *Diagrama de Freudenthal*
- *Transparencias de cuadrados divididos*
- *Baraja de Fracciones*
- *Dominó de Fracciones*

1.3.C. Hacer una búsqueda informática sobre páginas relacionadas con el laboratorio de matemáticas.

4. A MODO DE SÍNTESIS

- Enseñar no es lo mismo que aprender. El profesor enseña y el alumno aprende.

- Para aprender el alumno debe generar ideas, y para ello se requiere actuar, ***hacer****.*

- Para facilitar la enseñanza y el aprendizaje se utilizan recursos y materiales. Su intención es tanto mejorar la comunicación como facilitar la acción del alumno.

- Recursos y materiales son instrumentos para enseñar. Se diferencian en que los materiales han sido diseñados con intención educativa, mientras que

los recursos existen con otras finalidades, y el profesor decide emplearlos en su enseñanza.

- Se llama actividad de enseñanza a la que realiza el profesor. Actividad de aprendizaje es la que realiza el alumno como respuesta a las actividades de enseñanza.

- Al contextualizar las actividades formando tareas se promueve un aprendizaje significativo.

- Las tareas se componen de un contenido matemático y una situación de aprendizaje.

- Una enseñanza que utiliza materiales y recursos da mayor protagonismo al alumno, manipulando los materiales y resolviendo problemas.

- Los modelos de enseñanza de las Matemáticas cambian según el tipo de actividades de enseñanza que predominan.

- Las actividades de enseñanza se diferencian principalmente por el tipo de actividades de aprendizaje que promueven y en función del aprendizaje que pretenden lograr.

- Hay actividades de enseñanza y aprendizaje de: memoria, rutina o procedimiento, comprensión o entendimiento y opinión

- Una enseñanza en la que prevalezcan las actividades de memoria y rutina promoverá aprendizajes mecánicos. Una enseñanza que enfatice las actividades de comprensión y opinión da mayor autonomía al alumno.

- La enseñanza que emplea recursos y materiales tiene que adaptar el espacio y el tiempo.

- Materiales y recursos tienen que emplearse con finalidad didáctica, formando parte de tareas bien definidas, basadas en problemas comprensibles por los alumnos y haciendo funcionales los materiales.

- El empleo de materiales hace concebir el aula como un laboratorio.

*- La **puesta en común** de lo aprendido obliga a expresar con palabras, argumentar y justificar lo aprendido, dándole mayor fundamento y facilitando su recuerdo y recuperación.*

5. ACTIVIDADES DE AMPLIACIÓN DEL TEMA

Actividad 1: Resolución de situaciones utilizando el material

Utilizando materiales, revisar la siguiente situación y responder a las cuestiones planteadas:

Juanito dice que para hacer una división de fracciones hay que dividir el numerador del dividendo por el del divisor, y el denominador del dividendo por el del divisor:

$$\frac{4}{9}:\frac{2}{3}=\frac{4:2}{9:3}=\frac{2}{3}$$

Antoñito le dice a Juanito que la división se hace multiplicando en cruz:

$$\frac{4}{9}:\frac{2}{3}=\frac{4\times 3}{9\times 2}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

Estudiar cuál de los dos tiene razón. Justificar si ambos procedimientos valen para todas las fracciones o sólo para algunas. Buscar otra forma de hacer la división de fracciones que sea válida para todas las fracciones.

Ante la duda, Juanito y Antoñito le preguntan a su vecino Pepe cómo se hace la división de fracciones, quien les dice que para poder dividir fracciones primero hay que igualar denominadores, y luego se dividen los numeradores de las fracciones obtenidas:

$$\frac{4}{9}:\frac{2}{3}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{6}{9}}=\frac{4}{6}$$

Analizar si el procedimiento propuesto por Pepe vale para dividir dos fracciones cualesquiera.

Enunciar un problema de división de fracciones y razonar como Pepe.

Actividad 2. Propuesta de enseñanza

Diseñar una tarea para la enseñanza de la división de fracciones, compuesta por una situación de aprendizaje que de sentido a la división, y un conjunto de 5 actividades de aprendizaje que utilicen materiales didácticos.

Tema 2.

ANÁLISIS Y CLASIFICACIÓN DE LOS MATERIALES

En este libro presentamos materiales y recursos para la enseñanza de las Matemáticas. Sólo vamos a estudiar una pequeña parte de ellos. Para poner orden en el conjunto de materiales y recursos que presentamos, en este tema vamos a clasificarlos, es decir, vamos a establecer criterios que permiten agruparlos. Comenzamos el tema presentando varios de estos criterios**.** Nos centraremos en dos de los criterios más útiles para el profesor: *el contenido matemático* que se puede trabajar con dicho material o recurso**,** y su *versatilidad***.**

Siguiendo el primero de estos criterios, en los apartados 2 presentamos materiales y recursos para la enseñanza de la geometría. Esta información se completará en el tema 5. En el apartado 3 nos centramos en un recurso de gran versatilidad el papel doblado.

Ante la escasez de materiales y recursos (no informáticos) en la mayoría de los centros, proponemos que el profesor utilice lo que le ofrece el entorno como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas y construya él mismo algunos materiales para el aula (o plantee a los alumnos dicha construcción a modo de actividad). Ambas ideas, junto a otras como el uso de libros divulgativos, se desarrollan en el apartado 4.

Finalmente en el último apartado hacemos una síntesis del contenido del tema y de las ideas más importantes y proponemos unas actividades para la puesta en práctica de las ideas trabajadas en el tema.

1. NECESIDAD DE CLASIFICACIÓN. CRITERIOS DE CLASIFICACIÓN.

Para poner orden en el conjunto de materiales y recursos para la enseñanza de las Matemáticas que presentamos en este libro, vamos a clasificarlos, es decir, a establecer criterios que permiten agruparlos.

Ya en el tema 1 hemos distinguido, como hacen Carretero y otros (1995), entre materiales y recursos según si han sido diseñados con intención educativa o con otras finalidades y es el profesor quién decide emplearlos en su enseñanza. De forma paralela, Cascallana (1988) distingue entre *materiales no estructurados* y *materiales estructurados*. Especialmente en educación infantil, los juguetes, objetos de embalaje, material de desecho, etc., constituyen recursos para la captación de cualidades matemáticas siendo útiles para que los niños se relacionen con las formas, posiciones, posibilidades de movimiento, practiquen el conteo, midan, etc.. A estos objetos son a lo que Cascallana llama materiales *no estructurados*. Los materiales *estructurados,* en cambio, son específicos para la enseñanza, han sido diseñados con este fin.

En nuestro libro estamos tratando materiales y recursos en general, aunque con frecuencia nos centramos en materiales estructurados.

Entre los criterios para clasificar los materiales y recursos que pueden interesar al profesor conviene destacar *las intenciones educativas*, *el contenido matemático* que permiten trabajar, *las cualidades educativas* que tengan, o su *interés para que estén en el departamento de Matemáticas* del centro de enseñanza.

En la figura 2.1 presentamos algunos criterios para clasificar los materiales o recursos, agrupados en dos apartados: *utilidad* y *formato.*

- **Según la utilidad**
  - Contenido
    - Aritmética
    - Álgebra
    - Geometría
    - Funciones
    - Estadística y Probabilidad
  - Nivel Educativo
    - Educación Infantil
    - Educación Primaria
    - ESO
    - Bachillerato
  - Momento en que se utiliza (Corbalán, 1994)
    - Pre-instruccional
    - Co-instruccional
    - Post-instruccional
  - Tipo de tarea y actividad
    - Mostrar – Observar
    - Proponer - Manipular
    - Plantear – Resolver problemas
    - Buscar – Desarrollar estrategias
  - Tipo de aprendizaje
    - Memorizar (retener, recuperar)
    - Comprender (relacionar)
    - Resolver problemas
    - Aplicar algoritmos
    - Ejercitarse (dominar técnica)
- **Según el formato**
  - Soporte
    - Informático
    - Material plástico
    - Papel
  - Accesibilidad
    - Fácil de encontrar en mercado
    - Solamente en comercio especializado
  - Grado de difusión
    - Muy conocido y difundido
    - Muy específico, poco difundido

Figura 2.1

En primer lugar nos ocupamos de *para qué sirve (utilidad).* Según la posición que adoptemos en la enseñanza, consideraremos unas finalidades y unas utilidades de los materiales o recursos. Así podemos diferenciar el contenido matemático al que se refiere (ej. aritmética, álgebra, geometría, funciones,…) y el nivel educativo para el que es más adecuado (ej. primer ciclo de Educación Primaria, Bachillerato,…).

También conviene distinguir el papel que desempeñan en la enseñanza, es decir, en qué momento es más adecuado que se utilicen, qué actividades reclaman de los alumnos y que aprendizaje provocan.

Según si el material o recurso sirve para introducir un concepto, para trabajarlo o para repasar algo ya tratado, se distingue entre materiales y recursos ***pre-instruccionales, co-intruccionales y post-instruccionales,*** respectivamente (Corbalán, 1994). También se puede analizar si el material o recurso ayuda a ***memorizar*** algo (ej. programas de ordenador, fichas de términos y definiciones), ***comprenderlo*** y ***aplicarlo*** (ej. materiales manipulativos para resolver problemas y realizar actividades), o ***ejercitarse en algoritmos*** (ej. dominós, barajas, etc).

Además puede distinguirse si los materiales y recursos sólo sirven para mostrar y observar, o permiten manipulación, si ayudan a plantear y resolver problemas y/o si crean condiciones para desarrollar estrategias para resolverlos.

El segundo criterio que consideramos se refiere a *cómo es* el material, cuál es su formato, cómo se consigue, etc. (ver figura 2.1).

En la actividad que te proponemos al final del tema te pedimos que consideres estos criterios para caracterizar diferentes materiales y recursos. Al hacer la ficha de cada uno de ellos conviene analizar el máximo de sus cualidades, lo que enriquecerá la caracterización que hagas y su empleo futuro. Esta caracterización te permitirá identificar rápidamente el más adecuado según los intereses educativos de cada momento.

La clasificación debe ser útil al profesor. Por ello en los siguientes apartados vamos a usar sólo dos de criterios: *el contenido matemático* y la *extensión de su utilidad,* es decir, su *versatilidad.*

Un criterio importante para decidir qué materiales y recursos adquirir es la amplitud de su campo de utilidades. Hay materiales o recursos que valen para más de un contenido, son más *versátiles*. En la segunda parte de este tema presentaremos materiales versátiles que se utilizan para diversos contenidos y promueven aprendizajes diversos. El tangram, por ejemplo, se emplea en la geometría plana, fracciones, superficies, medida de longitudes, etc. Otro recurso de gran versatilidad que exploraremos en el apartado 3 es el papel doblado.

2. CLASIFICACIÓN A PARTIR DEL CONTENIDO MATEMÁTICO

Cuando el profesor va a enseñar un contenido matemático se debe plantear qué pretende que aprendan sus alumnos, es decir, qué competencias quiere que adquieran respecto a este contenido. Una vez clarificado este punto, debería conocer qué recursos y materiales tiene a su disposición para lograr esos objetivos.

CONTENIDO → MATERIAL DIDÁCTICO

En este tema vamos a continuar el barrido iniciado en el tema anterior por los materiales y recursos existentes para la enseñanza de las matemáticas. Para ello vamos a completar la presentación que hemos hecho en el primer tema, en el que hemos analizado algunos materiales para la enseñanza de las fracciones, mediante un recorrido breve por otro contenido importante de las Matemáticas: la Geometría.

En los temas 4 y 5, donde también se consideran otros bloques temáticos del currículo, completaremos la lista de materiales y recursos para la enseñanza de la geometría, incluyendo materiales informáticos.

Como hicimos en el tema 1 para las fracciones, recomendamos que se analicen las recomendaciones legales sobre la enseñanza de un tema antes de estudiar la conveniencia de emplear cada material o recurso.

2.1. MATERIALES PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA.

Para trabajar algunos materiales para la enseñanza de la Geometría tenemos que comenzar por analizar qué y cómo hay que enseñar la geometría en el nivel educativo que nos interese. Para ello revisamos lo que dicen los Decretos de Mínimos sobre la enseñanza de la Geometría (http://www.educacion.es/educacion/sistema-educativo/politicas/desarrollo-loe.html).

El anexo del desarrollo de las enseñanzas mínimas para la Educación Primaria así como el de las enseñanzas mínimas para la Educación Secundaria comienza definiendo unas competencias básicas que deben alcanzar los alumnos de dicha etapa. La segunda de ellas es la competencia matemática, que desarrolla la idea de “alfabetización matemática” de la que se hablaba en la evaluación PISA (OCDE, 2004). Esta competencia insiste en la funcionalidad del conocimiento, es decir, en que el alumno tiene que ser competente para resolver situaciones del entorno, empleando para ello las matemáticas. Por tanto, las matemáticas se convierten en un medio, más que un fin. Esto es especialmente novedoso respecto a la geometría, pues su enseñanza ha pretendido siempre más el conocimiento de términos y propiedades que la resolución de situaciones del entorno, pese a que en los principios de los desarrollos de la LOGSE se empezara a plantear esta cuestión.

En el segundo anexo de ambos documentos se presentan las orientaciones específicas para la asignatura de Matemáticas. Conviene diferenciar las recomendaciones que hace, analizando sus partes y examinando los términos, conceptos, procedimientos y actitudes que enfatiza.

El énfasis en la funcionalidad de los aprendizajes, junto con las competencias y capacidades destacadas, nos lleva a realzar que la enseñanza de la geometría pretende favorecer que los alumnos se sitúen en el espacio, en su entorno físico, disponiendo de una buena *visión geométrica*. Para lograr esto nos planteamos los otros objetivos parciales de la enseñanza de la geometría, es decir, que aprendan nombres, propiedades y principios de la geometría. Pero, además, el Decreto de Mínimos da una serie de recomendaciones sobre lo que hay que proponer en clase, insistiendo en que los alumnos deben *construir, dibujar, modelizar, medir y clasificar con criterios libres*, procurando además relacionar las matemáticas con otros ámbitos, como el arte.

En los estándares curriculares del NCTM americano (NCTM, 2003) se indica que los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a los estudiantes para:

- Analizar las características y propiedades de figuras geométricas y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas.

- Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.

- Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas.

- Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.

Marjorie Senechal, en el texto de Steen (1998), nos da unas instrucciones para estructurar los temas relacionados con las formas distinguiendo tres niveles de competencia: elemental, intermedio y avanzado. En documento B.1 que se incluye en el anexo B muestra una copia del cuadro que propone Senechal. De él destacamos que las etapas que propone son:

- Identificación y clasificación

- Análisis

- Representación y visualización

Concretamos estas dimensiones generales en las siguientes competencias geométricas que tiene que adquirir el alumno (Alsina y otros, 1988):

- *Identificar* figuras en el entorno (observar),

- *Caracterizar* estas figuras (buscar regularidades, propiedades),

- Buscar criterios que permitan *clasificar* las formas y aplicarlos a *clasificarlas,*

- Utilizar estos criterios para *definir* las formas con precisión, aprendiendo sus nombres correspondientes y los términos que se utilizan para ello,

- *Medir* todas las magnitudes que interesan en las figuras (longitudes, superficies, volúmenes, amplitud de ángulos, etc.), de manera directa e indirecta,

- Analizar las cualidades obtenidas, y llegar a *establecer propiedades* que las relacionen,

- *Demostrar* algunas de las propiedades encontradas.

Para hacer que los alumnos realicen actividades de estos tipos, examinaremos dos materiales manipulativos que promueven varias de estas competencias: el *geoplano* y el *mecano.*

2.2 GEOPLANO

Es un material estructurado propuesto por Gattegno y difundido en España por Puig Adam (Cascallana, 1988). Consiste en un tablero generalmente cuadrado, en el que se han introducido clavos en los vértices de distintas pautas, de manera que sobresalen de la superficie. Apoyando aros de goma elástica en los clavos se pueden construir formas. Los clavos pueden formar una cuadrícula, un polígono regular, o cualquier otra pauta. En la actualidad algunas casas comerciales ofrecen geoplanos de plástico (ver figura 2.2.1.A).

Figura 2.2

Puedes fabricar un geoplano clavando parcialmente clavos en una tabla, siguiendo una pauta determinada. Por ejemplo en los vértices de una cuadrícula (ver figura 2.3), en los vértices de un polígono regular (ver figura 2.4), o en los vértices de un papel isométrico (ver figura 2.5). El más corriente es el cuadriculado. Puedes comprar aros elásticos, y con ellos formar figuras.

También existen versiones virtuales de este material (ver http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_277_g_1_t_3.html?open=activities y http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_127_g_2_t_3.html?open=activities).

Para trabajar con el geoplano vamos a emplear un dibujo del mismo, aunque en el aula recomendamos trabajar previamente con el geoplano de forma manipulativa. El más sencillo consiste en un papel pautado. Vamos a utilizarlo dibujando sobre él segmentos (que corresponden a los aros elásticos), que unan vértices de la red dibujada en el papel.

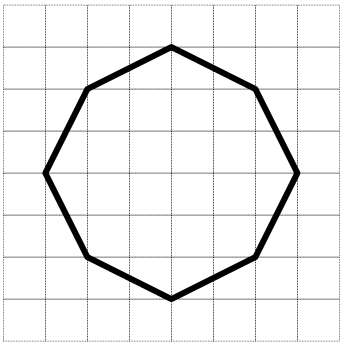


Figura 2.3

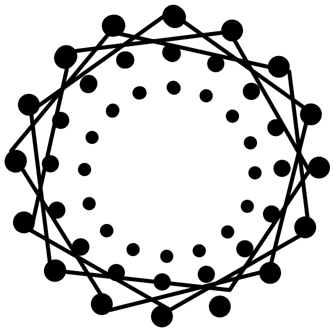


Figura 2.4

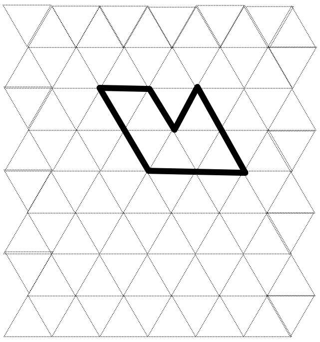


Figura 2.5

Presentamos a continuación varias actividades que se pueden realizar con el geoplano: GEO1. Construir polígonos diferentes, GEO2. Áreas y Perímetros y GEO3. Otras funciones del Geoplano.

GEO1. Construir polígonos diferentes

Comenzamos por construir todos los triángulos distintos que se pueden hacer en un geoplano cuadriculado de 4 puntos de lado, al que llamamos de 4x4. Al realizar esta actividad habrá que identificar formas, buscar criterios de igualdad de figuras, caracterizar las figuras, clasificarlas, ponerle nombre, buscar propiedades, etc., y en último lugar, demostrar que no hay más figuras. En la figura 2.6 aparecen distintos triángulos rectángulos en el geoplano de 4x4.

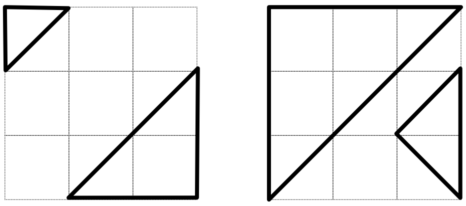


Figura 2.6

Completa la actividad. Indica el número de triángulos construidos y alguna caracterización literal de ellos. Recuerda, no valen dibujos, sino sólo palabras para indicar cuáles y cuántos triángulos diferentes se puede construir.

Posteriormente construir todos los polígonos diferentes en el mismo geoplano.

GEO2. Áreas y Perímetros

Calcular áreas y perímetros de polígonos construidos sobre un geoplano cuadrado. Para ello tomamos como unidad el área y lado, respectivamente, del cuadrado unitario. Comenzar por obtener triángulos con la misma área y diferente perímetro, y con el mismo perímetro y diferente área. Esta actividad permite establecer relaciones entre área y perímetro, lo que puede evitar la confusión que se establece entre estas dos medidas del polígono y permite desafiar algunas creencias habituales en el alumnado tales como que a mayor perímetro corresponde mayor área o que dado un perímetro y un área existe una única figura posible con dichas medidas.

GEO3. Otras funciones del Geoplano

El Geoplano es un material con alto grado de versatilidad. Ya hemos visto sus potencialidades para formar figuras y obtener medidas. También puede emplearse en aritmética, para trabajar con fracciones, representarlas, realizar algunas operaciones con fracciones, resolver problemas de fracciones empleando el geoplano, etc.

2.3 MECANO

Partimos de un juego clásico, el Mecano, inventado por F. Homby, y que consiste en una serie de ruedas, pasadores y piezas metálicas perforadas, que pueden ser combinadas de distintas maneras para construir diferentes objetos. El principio fundamental del mecano es que *los orificios de sus piezas son equidistantes*. Del mecano primitivo en metal nos quedamos con sus piezas largas de anchura un solo agujero, para formar polígonos. Las piezas se unen con tornillos, lo que permite que los vértices tengan cierta movilidad, tal como aparece en la figura 2.7.

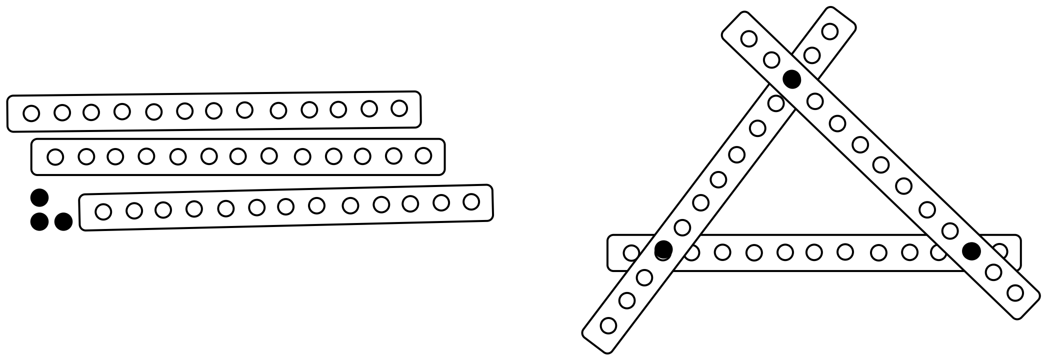


Figura 2.7: Piezas del Mecano

Puedes aprovechar las piezas del mecano clásico o comprar los existentes en el mercado. En las tiendas de juguetes puedes encontrar construcciones de este tipo con piezas de plástico. Proyecto Sur lo ha comercializado con barras en cartulina. Igualmente las puedes recortar en cartulina, y hacerle agujeros con los taladradores de oficina. Como tornillos puedes emplear ganchos de conexión o agrafes (unas grapas que tienen dos lengüetas que se abren) de venta en bazares y papelerías.

En Cascallana (1988) encontrarás algunos de los objetivos y ventajas del mecano, especialmente en la iniciación del niño con la geometría plana.

Las actividades que practicaremos son: MEC1. Triángulos, MEC2. Cuadriláteros, MEC3. Áreas y perímetros, MEC4. Composición y descomposición de polígonos. Polígonos flexibles y rígidos.

MEC1. Triángulos

Construir todos los triángulos distintos con piezas de determinada dimensión. En esta actividad se puede ejercitar la construcción de formas, establecer criterios de igualdad de triángulos, buscar propiedades de los triángulos, hasta obtener y demostrar las condiciones que tienen que verificar las longitudes de los lados de un triángulo (Castelnuovo, 1970).

Al estudiar los tipos de triángulos construidos con determinadas piezas, habrá que estudiar las relaciones métricas (medidas por la distancia entre agujeros), aplicando el Teorema de Pitágoras para comprobar si un ángulo es recto.

MEC2. Cuadriláteros

Construir cuadriláteros de diverso tipo con varias piezas. La actividad llevará a identificar las características de cada tipo de cuadrilátero, lo que puede utilizarse para afrontar su clasificación.

La segunda parte de esta actividad consiste en formar cuadriláteros dadas las diagonales, el punto de corte y los ángulos que forman, utilizando piezas atornilladas por algún agujero interior, y unidas por cordón elástico (figura 2.8). Con esta actividad se obliga a identificar formas, recordar nombres, identificar regularidades –igualdad de lados, paralelismo, ángulos, etc.-, demostrar esas regularidades en función de la construcción, analizar si es posible otra construcción, etc. (Ver Castelnuovo, 1970)

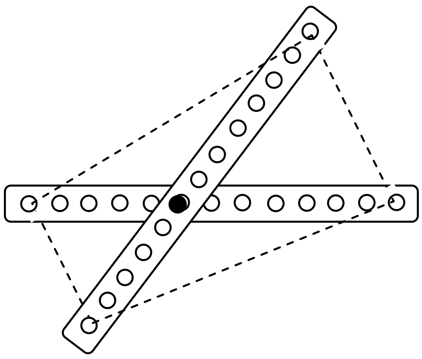


Figura 2.8

MEC3. Áreas y perímetros

Construir un cuadrilátero con cuatro piezas dadas. Se observará que es flexible (puede cambiar de forma al cambiar ángulos). Todos los cuadriláteros obtenidos tienen igual perímetro y diferente área. Obtener posteriormente figuras de la misma área y distinto perímetro. Así se estudiará la relación entre área y perímetro de polígonos, como propusimos con el geoplano.

MEC4. Composición y descomposición de polígonos. Polígonos flexibles y rígidos

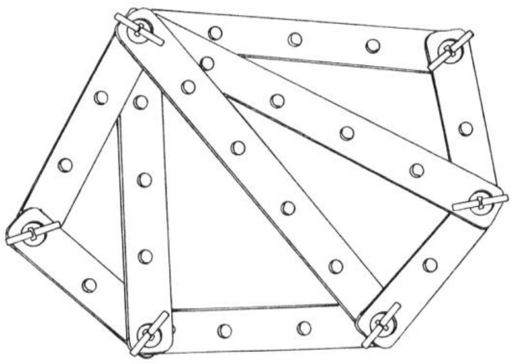


Figura 2.9 (Cascallana, 1988)

Se entregan varias piezas y se pide construir polígonos que tengan lados comunes (figura 2.9). Posteriormente se pide que construyan un polígono con varias piezas, y que lo descompongan en triángulos mediante otras piezas. Esta segunda actividad llevará a ver que no todas las figuras aceptan esta descomposición, ya que los agujeros imponen unas medidas discretas que sólo podrán utilizarse en casos especiales.

Las siguientes actividades consistirán en repetir la situación anterior, pero observando qué polígonos de los construidos son flexibles y cuáles son rígidos.

3. RECURSOS MATERIALES VERSÁTILES: EL PAPEL DOBLADO.

¿Qué materiales debe conocer un profesor de matemáticas? ¿Cuáles deben estar en el Departamento? Por supuesto los que le sean más útiles. Sugerimos que para ello adquiera y utilice los materiales y recursos más versátiles. Es decir, los que se prestan a la enseñanza de más contenidos y mayor cantidad de aprendizajes. Pero, además, recomendamos que seleccione los que hacen que el alumno manipule antes de simbolizar, y que haciendo aprenda y comprenda los procesos. En resumen, que sean útiles en la co-instrucción de los contenidos más complejos.

Estos materiales y recursos van a mostrar que las Matemáticas están en el entorno, que aprender es hacer, jugar, manipular, además de atender y calcular, y que resolviendo problemas y situaciones, se comprenden los conceptos.

En este tema vamos a presentar un recurso muy versátil y accesible: el doblado de papel (Papiroflexia). Otros materiales muy versátiles son el geoplano y el tangram.

3.1 PAPEL PLEGADO

El doblado de papel es un recurso versátil importante. Algunas de sus ventajas son las siguientes:

- Es fácil de obtener
- Forma parte de los juegos tradicionales que se inician en la vida familiar, y permiten hacer muchas cosas
- La Geometría del papel plegado es isomorfa a la geometría de la regla y el compás

Las normas de la Papiroflexia (u Origami) más ortodoxas sólo permiten doblar papel, sin cortar ni pegar. Igualmente establecen limitaciones en los dobleces que se pueden hacer. Sólo de esta forma se habla de la geometría del papel doblado, que es isomorfa a la de regla y compás.

Con el papel doblado se pueden obtener los mismos resultados que con la regla y el compás: trazar rectas (arista por el que se dobla), obtener puntos (cortes de dos rectas) con determinadas condiciones, trasladar distancias, etc. Pero el papel doblado no permite obtener circunferencias completas, aunque es posible obtener todos los puntos que se quiera de ella. Se rompe sin embargo la continuidad de los círculos.

En este caso, sin embargo, no vamos a ser tan estrictos ya que queremos emplear el papel doblado como recurso didáctico. Por ello permitiremos otros dobleces y acciones, aunque estos dobleces no sean ortodoxos (pues no llevan a un lugar determinado de antemano). Permitiremos que se realicen ajustes hasta lograr igualar partes. Así, por ejemplo, si aceptamos que se pueda doblar un ángulo en tres partes, ajustando hasta que coincidan, llegaríamos a construir la *trisección del ángulo* que es irrealizable en general con regla y compás.

Si quieres saber más sobre papel doblado entra en la página web de la Asociación española de Papiroflexia y su revista Pajarita: www.pajarita.org. La relación entre papiroflexia y matemáticas la puedes encontrar en los numerosos artículos y libros que se han publicado sobre el tema. Hemos destacado algunos que pasamos a comentar y recomendar.

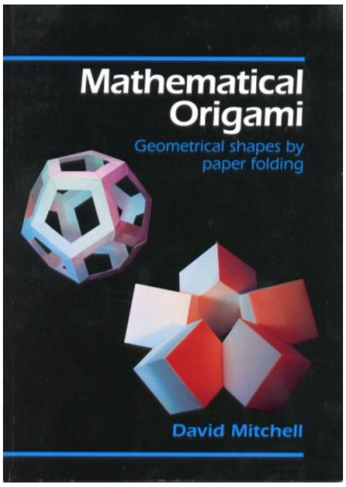
Antonio Ledesma completó en 1996 un número extraordinario de la revista Pajarita, de la Asociación española de Papiroflexia. En ella, Antonio hace un recorrido amplio por los campos de la matemática, empleando la papiroflexia. Él es autor del siguiente decálogo sobre el empleo del papel doblado en clase de matemáticas:

Con las actividades de papiroflexia:

1. Se valora la interrelación entre la actividad manual y la intelectual
2. Se consigue la apreciación de las componentes estéticas de los objetos y formas
3. Se facilita la comprensión de los conceptos geométricos
4. Se mejora la percepción espacial
5. Se fomenta la capacidad para hacerse preguntas
6. Se interpreta una nueva simbología
7. Se propicia la precisión en el trabajo manual
8. Se ve la utilidad del trabajo en equipo
9. Se aprecia la belleza ligada a regularidades y cadencias

10. Se desarrolla la fantasía, la creatividad y, lo que es muy importante, no se pierde en ningún momento el carácter lúdico (Ledesma, 1996, p. L)

Esta publicación concluye con una bibliografía básica muy interesante, pese a que ya tiene más de 10 años.



El libro de Mitchell (1997), Mathematical Origami, es una publicación de la editorial Tarkin que reúne aportes importantes y fáciles de matemáticas y papiroflexia, especialmente para la formación de poliedros.

Igualmente ocurre con el texto de Peña (2001) que hace un recorrido amplio por aspectos matemáticos, empleando la papiroflexia, llegando a ampliar los aspectos geométricos con otros campos como las funciones y el álgebra.

Kasahara y Takahama (2000) incorporan en su libro un capítulo dedicado a la *Belleza y placer de las formas* geométricas. En él presentan figuras con igual área, poliedros modulares y cubos formados de muchas maneras.

A continuación proponemos algunas tareas a realizar mediante el plegado de papel:

PD1. Manejar papel sin tener en cuenta sus bordes,

PD2. Resolver algunos problemas geométricos,

PD3. Obtener polígonos regulares a partir de papel cuadrado y estudiar la exactitud del procedimiento,

PD4. Obtener poliedros,

PD5. Fractales con papel cortado

PD6 Kirigami.

PD1. Manejar papel sin tener en cuenta sus bordes.

1.1. *Hacer un rectángulo y un cuadrado con un papel de borde irregular*. Habitualmente trabajamos con papel rectangular o cuadrado, confiando en la corrección de su formato. Pero también podríamos partir de un papel de borde irregular, y esto no es problema pues podemos hacer un rectángulo (Figura 2.10). Una vez obtenido el rectángulo o el cuadrado, podemos partir de papeles con esta forma para obtener otras figuras.

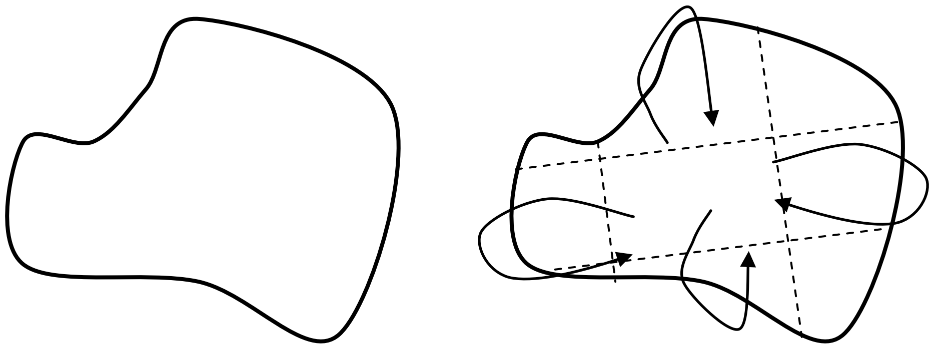


Figura 2.10: Un rectángulo a partir de un papel irregular

1.2. *Estudiar los formatos habituales de papel*: Conocer las dimensiones del Din A4. Obtener papeles con dimensiones determinadas: 1x2, 1x3; 1x√2; 1x√3; 1xΦ (rectángulo áureo). El estudio de los formatos Din A4 es muy interesante (ver Alsina, 2005, Gómez, 2002) desde el punto de vista de la matemática elemental. En el documento B.2 del anexo B puedes encontrar una unidad didáctica para la geometría empleando este motivo. En ella se analizan algunas metodologías que se podrían emplear para ello. La propuesta y análisis forman parte de la conferencia que Eloy Domínguez dio en las Jornadas de *Investigación en el Aula de Matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría*, celebradas en Granada, en noviembre y diciembre del 2005.

PD2. Resolver algunos problemas geométricos

2.1. Obtener una recta perpendicular a una recta dada, desde un punto exterior o interior. Una solución a este problema es la siguiente:

a) Plegando la hoja se forma una recta r; se puede remarcar con lápiz.

b) Señalamos en el papel un punto P exterior a la recta r.

c) Por el punto P realizamos un doblez de manera que hagamos coincidir la recta r sobre sí misma. Visto de otra manera, estamos convirtiendo una parte de la recta (semirrecta) en la otra parte, por la simetría de eje la recta que surge con este doblez.

d) La recta que surge del nuevo doblez pasa por P y es perpendicular a la recta r ya que es el eje de simetría, que es perpendicular a los segmentos que unen puntos simétricos (figura 2.11).

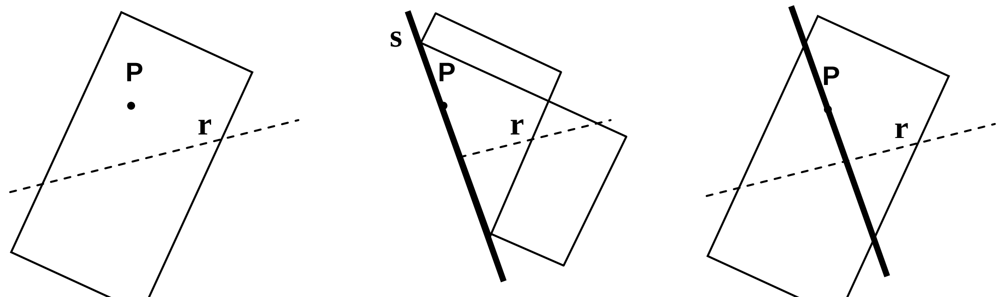


Figura 2.11

Os dejamos a vosotros que penséis y busquéis soluciones a los siguientes problemas.

2.2. *Obtener la recta bisectriz de un ángulo.*

2.3. *Obtener puntos que se encuentran a una distancia dada de un punto conocido.*

2.4. Trazar una paralela a una recta, por un punto dado o a una distancia conocida

2.5 A partir de un papel cuadrado, obtener un cuadrado cuya área sea justo la mitad que la del cuadrado de partida.

2.6 Construir un rombo a partir de un cuadrado

2.7 Construir un rombo a partir de un rectángulo

2.8 Construir un trapecio escaleno, uno rectángulo y uno isósceles

PD3. Obtener polígonos regulares a partir de papel cuadrado y estudiar la exactitud del procedimiento

3.1. Construir un cuadrado y justificar su construcción. Esta primera actividad es bastante sencilla y conviene pedir que se justifique matemáticamente ¿Qué propiedades geométricas hacen que resulte un cuadrado cuando se hace coincidir el lado pequeño del papel rectangular con el lado grande dejando invariante el vértice común?

3.2. Construir un triángulo equilátero. Una vez resuelto este problema se pueden afrontar variaciones interesantes, como construir un triángulo equilátero de lado dado, y construir el máximo triángulo equilátero posible a partir del papel rectangular o cuadrado.

Para construir un triángulo equilátero podemos partir de un cuadrado, trazamos la paralela media y llevamos un vértice cualquiera a esa paralela, manteniendo que el giro deje el otro vértice fijo (Figura 2.12):

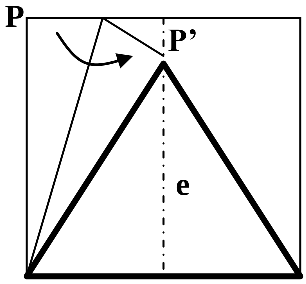


Figura 2.12.

Esta resolución no se acepta en la geometría ortodoxa del papel doblado, ya que emprendemos el doblez sin fijar dónde vamos a llevar el punto **P**, buscamos que coincida con algún punto de la recta ***e***.

3.3. Construir Hexágonos y Octógonos regulares. A partir de polígonos regulares de un número de lados podemos construir los que tienen el número de lados doble. En la figura 2.13 se aprecia el procedimiento para construir un hexágono a partir de un triángulo equilátero:

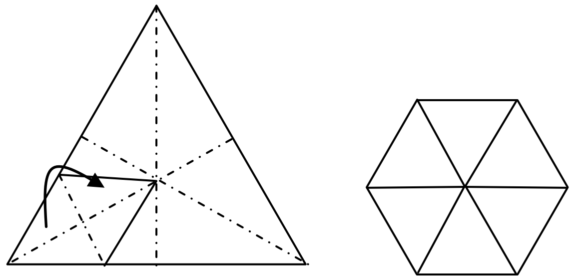


Figura 2.13.

Dejamos como ejercicio el construir el octógono regular, así como otras formas de obtener el hexágono regular, supuesto que se ha construido un triángulo equilátero.

3.3. Enunciar un procedimiento general para obtener polígono de 2n lados, teniendo construido el polígono regular de n lados. Los procedimientos anteriores permiten solucionar este problema, que dejamos también abierto.

3.4. Construir un Pentágono regular. La primera y más familiar solución consiste en construir un nudo de papel de forma de Pentágono regular. Con una banda de papel, de lados paralelos, se puede hacer un pentágono regular, sin más que hacer un nudo (Figura 2.14). Doblando después las bandas sobre el nudo, y cortando los excesos, obtenemos un pentágono. Como ejercicio para el lector queda el comprobar que es un pentágono regular.

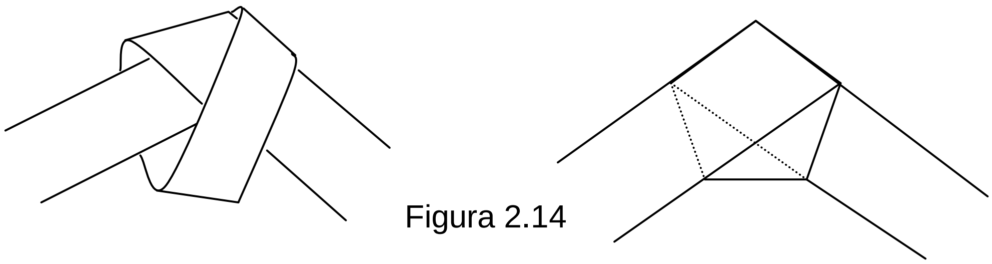


Figura 2.14

PD4. Obtener poliedros

4.1. Elaborar módulos para formar deltaedros: Tetraedros, Octaedro, Icosaedro. Esta es la forma habitual de realizar poliedros. En la bibliografía indicada se pueden encontrar numerosos módulos para construir tetraedros, y con ello los deltaedros. En el documento B.3 del anexo B se describe con dibujos la obtención del tetraedro y de los otros deltaedros que son poliedros regulares.

4.2. Elaborar cubos de diferentes formas (modulares, un solo papel, etc.). La construcción más conocida del cubo se basa en seis módulos (uno por cara). En la figura 2.15 aparece la construcción de cada módulo. Hay que cuidar que todos los módulos tengan la misma orientación, pues en caso contrario no se podría formar el cubo.

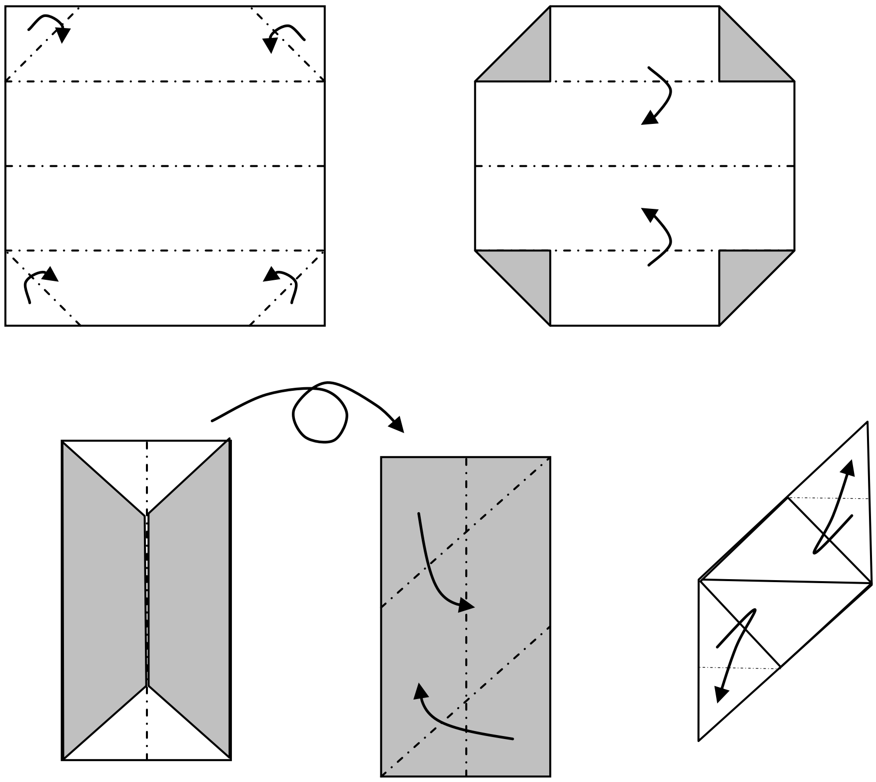
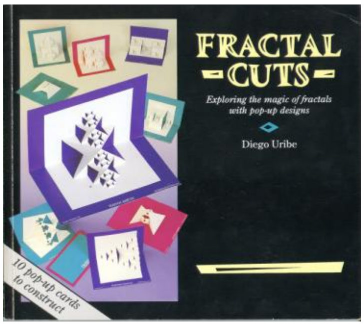


Figura 2.15. Módulo para el cubo

4.3. Construir otros poliedros, empleando módulos o construcciones particulares. Para ello se puede intentar combinar módulos. En la bibliografía indicada pueden encontrarse numerosos módulos y diferentes modelos.

PD5. Fractales con papel cortado.

5.1. Realización de fractales con papel doblado y cortado, siguiendo los del libro de Uribe (1988) (pop up).



El conocido libro de Uribe (1988), editado por Tarkin, presenta una colección de fractales realizados con la técnica de ganar relieve a partir del papel doblado y cortado (pop up). El principio básico consiste en cambiar de cóncavo a convexo una parte del papel, bien diferenciada, con lo que se consigue un volumen. En la figura 2.16 podemos observar la construcción del cubo, mediante esta técnica.

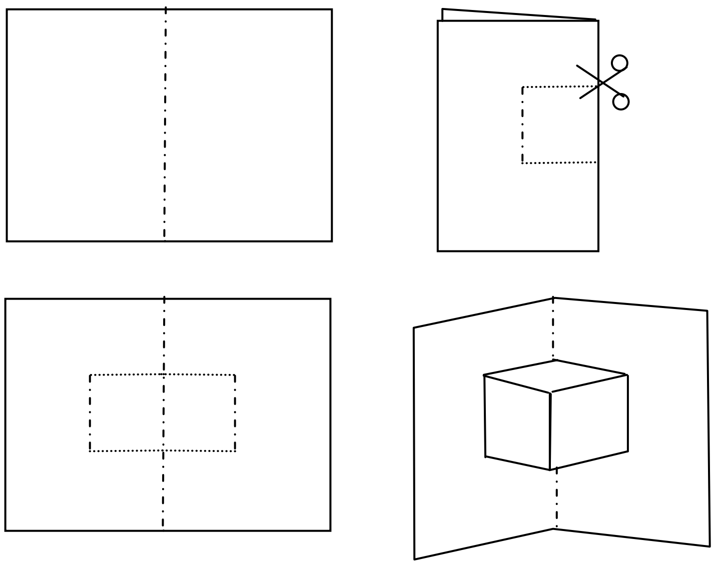


Figura 2.16: Construcción de un cubo. Se dobla el papel. Se corta por las líneas punteadas y se dobla por las discontinuas. Posteriormente se hace convexo el trozo central.

Esta técnica permite construir fractales. La figura 2.17 muestra la plantilla de la tarjeta de Sierpinski, basada en el fractal del mismo nombre. En esta plantilla se debe cortar por las líneas punteadas, y doblar por las discontinuas.

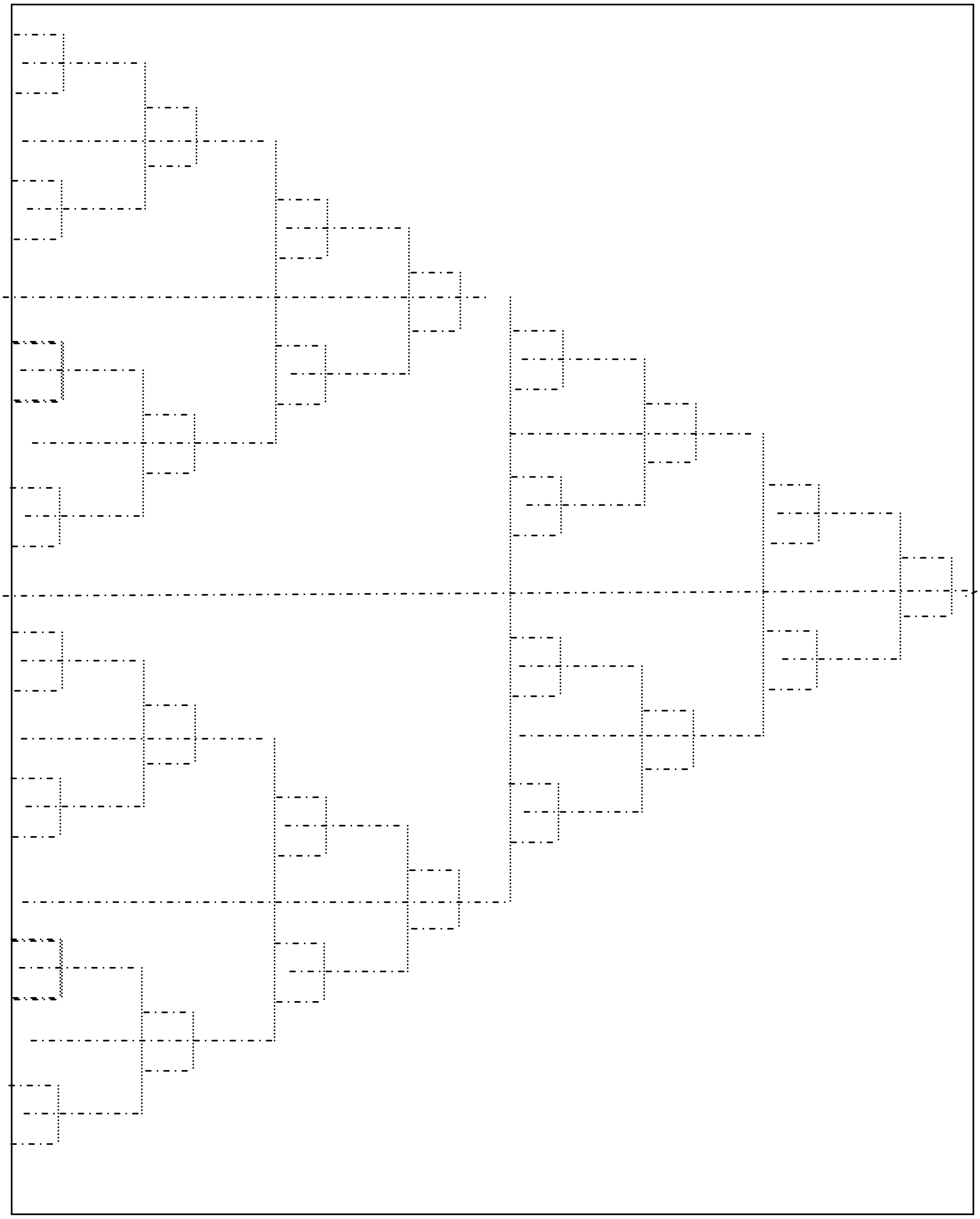


Figura 2.17. Plantilla de la tarjeta de Sierpinski

Recomendamos especialmente el libro de Uribe para realizar los fractales contenidos en el mismo. Así mismo se puede utilizar software gratuito tales como Workshop 1.1. y 3DCard para la construcción de este tipo de plantillas e incluso visualizar los fractales que se obtienen a partir de ellas (Ver figura

2.18). La utilización de estos programas nos permitirán también trabajar con los alumnos el complicado paso del plano al espacio y viceversa (Grupo Pi, 2005).

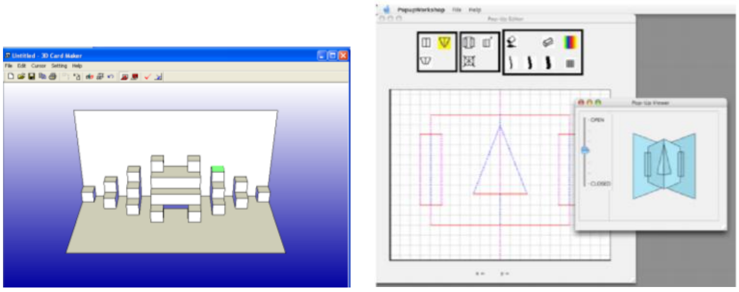


Figura 2.18 Imágenes extraídas de los software Workshop 1.1. y 3DCard

5.2. Otras construcciones con papel doblado y cortado. Siguiendo esta misma técnica, se han elaborado multitud de construcciones, con fines artísticos. Recomendamos las páginas siguientes:

http://www.tamasoft.co.jp/craft/popupcard_en/

http://members.shaw.ca/woa/modarchhouse.htm,

http://members.shaw.ca/woa/newhome.htm

http://baudandbui.free.fr/plier/origamic.shtml

En ellas se pueden encontrar construcciones arquitectónicas, empleando el cortado, doblado y cambio de concavidad (pop up).

PD6. Kirigami

El grupo Alquerque de Sevilla nos presenta en el número 59 de la revista Suma un trabajo diferente con el doblado y recorte de papel al que se denomina kirigami. Este nombre es asignado al arte de crear figuras planas recortando papel con tijeras. Para ello partimos de un trozo de papel que no tenga ninguna marca y doblando y cortando debemos construir la figura que queramos crear.

Como actividad para el aula proponen la obtención, a partir de tantos dobleces como queramos pero un solo corte recto con tijeras, de figuras tales como las que recoge la figura 2.19.

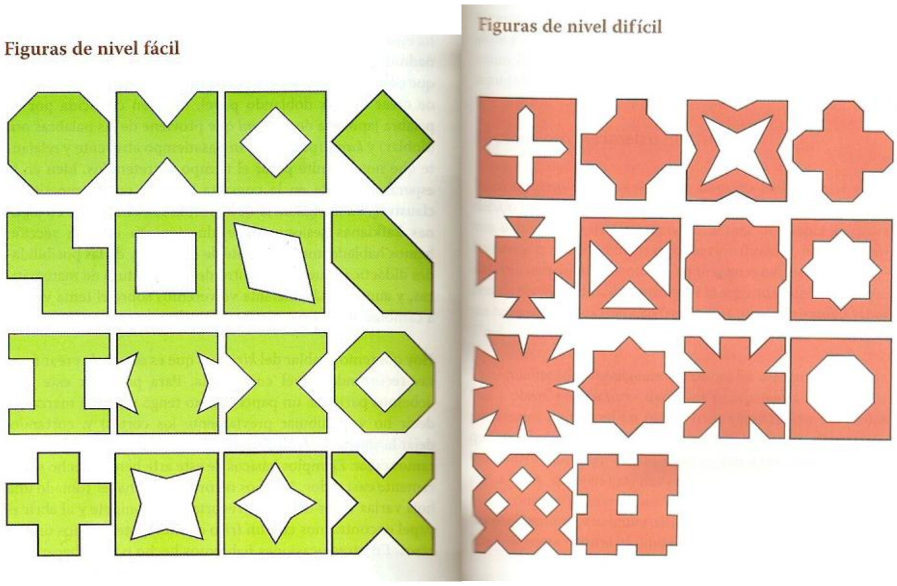


Figura 2.19

Con este tipo de actividad se propone desarrollar la atención y observación, la discriminación, la percepción visual, la imaginación y creatividad, y la paciencia y constancia.

Buscando información o usando vuestra propia creatividad y experiencia indicar posibles actividades matemáticas para el aula a realizar a partir del uso del kirigami.

4. EL PROFESOR Y LOS MATERIALES/RECURSOS DIDÁCTICOS. APROVECHAMIENTO Y CONSTRUCCIÓN.

Todavía son escasos o insuficientes los materiales y recursos didácticos para matemáticas que existen en los centros de enseñanza. Y aun más rara es su utilización en clase. Últimamente se están supliendo por los medios tecnológicos y la incorporación de los ordenadores. Sin embargo es importante dar un lugar en el aula al uso de materiales y recursos manipulativos ya que son una ayuda importante para el aprendizaje de los alumnos. Pero ¿cómo y qué materiales puedes conseguir?

Esperamos que este libro te ayude a conocer algunos materiales y recursos, a aprender a manejarlos y a percibir el interés didáctico que tienen. Así te sentirás impulsado a buscarlos, adquirirlos y emplearlos en tus clases.

¿Cuáles adquirir? ¿Dónde se encuentran? ¿Cómo conseguir materiales y recursos suficientes para todos los alumnos de la clase? Estas son algunas preguntas prácticas que afrontamos como profesores.

El profesor interesado puede adoptar (o compaginar) tres actitudes para emplear materiales y recursos:

(a) aprovechar lo que existe en su entorno,

(b) hacer él mismo (o sus alumnos) los materiales y

(c) adquirir materiales y recursos didácticos de empresas que los comercializan.

Para este último caso, en el apartado 4.2 *Compra de recursos y materiales* te facilitamos alguna información al respecto. Otra opción son los libros divulgativos (ver apartado 4.3).

4.1. APROVECHAMIENTO DEL ENTORNO

Nuestra primera recomendación es que aproveches lo que ofrece el entorno. Comienza por lo más próximo, la ciudad en la que vives.

Seguro que en tu entorno hay aspectos interesantes para ver la matemática reflejada en ellos. Debes desarrollar sensibilidad para percibir estos aspectos y sentirás que son más de los que habías pensado. Para estimularte, te indicamos algunos ejemplos.

Hay elaboradas diversas actividades para aprender matemáticas en lugares públicos. Aparte del famoso número extraordinario de la revista Épsilon dedicado a la Alhambra, existen otras publicaciones y trabajos que proponen visitar la Alhambra con ojos matemáticos. La Universidad de Granada organiza todos los años visitas matemáticas guiadas, siguiendo los trabajos que han realizado Rafael Pérez Gómez y Ceferino Ruiz.

También existen propuestas para hacer visitas matemáticas a los Alcázares de Sevilla y la Mezquita de Córdoba. Una publicación de Luis Balbuena recoge su paseo matemático por La Laguna, en Tenerife. Todas estas ideas te servirán para hacer propuestas didácticas en el lugar que vives. Los Rallys y Gymkhanas matemáticas son recursos interesantes, que se celebran cada vez en más lugares: Cádiz (Aventura Matemática), Ronda, Almería (Problemas de Ingenio), Córdoba (Gymkhana matemática, coordinada por María Ángeles Benítez y Flores Serrano, y los trabajos de Paco Anillos, Miguel de la Fuente y Damián Aranda), etc., son ciudades donde se han celebrado este tipo de eventos, y van adquiriendo tradición.

En ellos se promueven actividades matemáticas aprovechando las ofertas del entorno. El artículo de Mª Ángeles Benítez y Flores Serrano (2006), basado en el excelente taller que presentaron en Granada, te puede dar algunas ideas al respecto. El juego informático ***Decorando la mezquita***, producido por Proyecto Sur de Ediciones, en 1992, de Miguel de la Fuente Martos es una muestra de la matemática del entorno.

En la página web http://www.irem.ups-tlse.fr/groupes/10rallye/index.html puedes encontrar información sobre los rallys matemáticos en Francia, especialmente los promovidos por el IREM de Toulouse, del que es responsable Adré Antibi.

El Grupo LaX ha elaborado una visita matemática al Parque de las Ciencias. En esa visita se realizan actividades con puzzles topológicos de cuerda y madera que existen en el Parque. El estudio y la explotación didáctica de los puzzles de alambre las pueden encontrar en los textos Montoya y Flores (2003) y Flores (2002 a y b) (ver http://www.ugr.es/~pflores/).

Las *actividades de Matemáticas en la Calle consisten* en sacar juegos matemáticos para que los manipulen, afronten los retos y se diviertan los paseantes de todas las edades. La experiencia ha tenido mucho éxito en Andalucía, a partir de su primera presentación en las VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática, en 1998, en Jaén, promovida por Rafael Pérez Gómez (ver su historia en Muñoz y otros, 2000). Posteriormente el grupo Matemáticas en la Calle de Córdoba y el grupo LaX de Granada, han explotado la idea, generando numerosas jornadas en diversos puntos de nuestra región y en otros lugares. Esto ha dado lugar a que se premiara su esfuerzo en la 5ª edición del concurso nacional Física y Matemáticas en Acción, con el primer Premio Nacional en la modalidad de Laboratorio de matemáticas. Los primeros firmantes de los grupos son Francisco España (Córdoba), y Luis Berenguer (Granada). En el documento B.4 que se incluye en el anexo B recogemos la ficha de uno de los materiales presentado en Matemáticas en la Calle, del grupo LaX.

En Sevilla, el Grupo Alkerke ha continuado la experiencia con mucho éxito.

En la página http://www.dgdc.unam.mx/, de la Casa de las Ciencias de la UNAM, también podrás encontrar ideas para aprovechar didácticamente el entorno.

Otra forma interesante de aprovechar el entorno es mediante la actividad *Fotografía Matemática*. Esta actividad se trabajará en el tema 4.

4.2. EL PROFESOR ARTESANO

Otra posibilidad que tiene el profesor para utilizar materiales didácticos es elaborarlos el mismo. Luis Berenguer, uno de los autores de este libro, ha realizado un importante trabajo en este sentido. En sus artículos (como Berenguer y otros, 1995) puedes encontrar algunas referencias a este papel: la artesanía del profesor.

El profesor artesano es sensible a las cualidades didácticas y plásticas del material didáctico. Tiene disposición a buscar materiales, diseñarlos, emplearlos él mismo en sus clases y divulgarlos. Para ello debe conocer los productos existentes en el mercado que le permiten construir los materiales. Pero además debe ser un “manitas”, es decir, disponer y saber manejar herramientas con las que tratar y moldear los productos. Se puede ser artesano con menos cualidades, sacando partido de los productos fáciles de trabajar, como el papel, cartón, cuerda, alambre, etc.

Para comportarte como profesor artesano tienes que dejar correr tu imaginación. Comienza por ser sensible a las potencialidades didácticas de los materiales del entorno. Así podrás ir haciendo una recopilación sistemática que te permita generar tu propio material.

Puig Adam llegó a estudiar la geometría de los objetos rotos, y a promover su empleo como recursos didácticos. Los textos de matemáticas de la vida cotidiana te muestran la potencialidad del empleo de lo que te rodea.

El grupo Matemáticas en la Calle de Córdoba ha elaborado materiales didácticos a partir de objetos baratos, lo que facilita su adquisición y elaboración.

Ya hemos mencionado materiales como el humor, que aparecen en los medios de comunicación. Existen muchos libros que te ayudarían en el empleo de estos medios (Flores, 2003, Fernández y Rico, 1995, Fernández Aliseda y otros, 2000, entre otros).

Ya sea para trabajar con materiales ideados por el docente o ya existentes, podemos aprovechar la “mano de obra” de nuestro alumnado para construir el material e incluso aprovechar dicha construcción para trabajar elementos matemáticos de dicho material. Por ejemplo, si vamos a trabajar con el tangram podemos dar las indicaciones necesarias para que los alumnos lo construyan utilizando escuadra y cartabón o a través del doblado de papel.

4.3. COMPRA DE MATERIALES Y RECURSOS DIDÁCTICOS.

Además de considerar la opción de construirte tú mismo o proponer a los alumnos la construcción de ciertos materiales o recursos didácticos, es recomendable que conozcas empresas que los comercializan. La primera referencia son las librerías y tiendas de materiales escolares de tu ciudad. Estas tiendas suelen tener catálogos de editoriales y distribuidores que venden materiales y recursos didácticos. Recomendamos las empresas siguientes:

- **Proyecto Sur,** empresa andaluza que produce materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas. Esta empresa se beneficia del interés matemático de sus gestores. Su página web es http://www.proyectosur.com/.

- **Bemal:** http://www.bemal.es/

- **Nardil** (francesa): http://www.nardil.com.es/

- **Natham**, editorial francesa, productora igualmente de material didáctico.

- **JOCDI – GOULA**, comercializados por Toyland.

- **Akros**, empresa valenciana: http://www.akros.org/

- **Invicta**, empresa inglesa.

- **Dideco**, dentro del programa exploreco: http://www.dideco.es

Visita estos lugares, examina los materiales que tienen, navega por las páginas web y analiza lo que hay y, si es posible, adquiere alguno de los más versátiles y baratos. Sólo entonces podrás decidir qué y cómo los puedes emplear en la enseñanza.

4.4. LIBROS DE MATEMÁTICA DIVULGATIVA

Otro campo que puedes aprovechar son las publicaciones de divulgación matemática existentes. En los documentos B.5 y B.6 del anexo B puedes encontrar una amplia lista de libros de matemática divulgativa destinados a niños y jóvenes. En ellos suele aparecer la edad del público al que va destinado. Hemos elegido aquellos que tienen una forma narrativa, es decir, que cuentan una historia que está relacionada con las matemáticas. La explotación didáctica de los libros juveniles es amplia. Resultan imprescindibles para la biblioteca del centro educativo. Pero además hay que aludir a ellos y utilizarlos en clase, de manera que no se queden en objetos decorativos. Presentan además gran potencial para el desarrollo de actividades interdisciplinares.

Son numerosos los compañeros que han hecho alguna alusión a los libros de matemática divulgativa para diseñar actividades didácticas. Teresa Valdecantos fue finalista de los II Premios Internacionales de Renovación Pedagógica en Educación Matemática Thales-San Fernando, con un taller basado en el libro “El Señor del Cero” (Valdecantos, 2001). Este taller propone 18 sesiones dedicadas a actividades centradas en el libro. Juani Navas (1997) nos propone una actividad de enseñanza basada en el libro de Meavilla y Contreras (1991).

María Dolores Saa (2002) ha realizado un estudio en profundidad sobre las matemáticas que aparecen en los cuentos y las canciones. Posteriormente hace propuestas didácticas empleando estos recursos. Si bien su trabajo está destinado a la educación infantil y primeros cursos de primaria, resulta interesante su propuesta didáctica para todos los niveles educativos. La propuesta abarca las siguientes fases:

1. Presentar el relato varias veces
2. Dramatizar el relato
3. Escenificar el relato manejando objetos
4. Secuencias gráficas del relato
5. Analizar la lógica del relato e inventar nuevos relatos.

En educación secundaria habría que eliminar algunos de ellas, pero parecen interesantes las últimas fases, para lo que el profesor deberá prepararse convenientemente. Los talleres sobre teatro y matemáticas (Romero y García, 2003), así como los textos sobre teatro matemático (Roldán 2002), pueden ser de utilidad.

5. A MODO DE SÍNTESIS

Para facilitar el manejo de materiales didácticos es necesario clasificarlos.

Existen diversos criterios para clasificar los materiales y recursos. Recomendamos emplear los más funcionales para el profesor.

El primer criterio para clasificarlos es el *contenido matemático*.

Con la enseñanza de la geometría se pretende que los alumnos adquieran competencias para situarse en el espacio, desarrollando buena visión espacial. Por tanto los materiales para la enseñanza de la geometría deben favorecer que los alumnos se relacionen con las formas y el espacio, manipulándolos, construyéndolos, clasificándolos, etc.

Los materiales versátiles son los más idóneos para tener en los departamentos de matemáticas de los centros de enseñanza.

El papel doblado y cortado es un recurso de fácil acceso, muy versátil, que permite muchas aplicaciones educativas, especialmente en matemáticas.

El profesor debe utilizar lo que le ofrece el entorno como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas.

Los museos y organismos suelen ofertar actividades que tiene un aprovechamiento didáctico para el profesor de matemáticas.

Hay muchos materiales que están al alcance de cualquiera, sin hacer grandes gastos, que el profesor puede y debe emplear, o promover que los alumnos lo consigan o construyan.

6. **ACTIVIDADES DE AMPLIACIÓN**

1. Busca un material para la enseñanza de la geometría distinto a los estudiados en este tema. Indica sus características empleando todos los criterios establecidos en este tema. Enuncia 3 actividades que podrían realizarse con dicho material señalando los objetivos de aprendizaje en cada actividad.

2. Busca en las páginas web de las sociedades de profesores de matemáticas actividades que se realizan utilizando lugares públicos. Selecciona alguna que te gustaría hacer y comienza a planificarla.

2. Busca en páginas web de empresas dedicadas a la producción de materiales y recursos. Busca también páginas de profesores artesanos que muestran sus trabajos.

3. Elabora por tu cuenta algunos de los materiales conocidos en este libro, que sean de fácil construcción.

Tema 3

LOS MATERIALES PARA LA ENSEÑANZA DE LOS BLOQUES TEMÁICOS DEL CURRÍCULO

En este tema presentamos varios materiales organizados por bloques de contenido categorizados según la LOE. No se trata de hacer un análisis exhaustivo, sino de hacer una revisión que confirma que para cada tema de Matemáticas es posible encontrar o diseñar un material que puede contribuir al aprendizaje de ese tema por parte de los escolares.

En cualquier caso la premisa es la que venimos sosteniendo en el curso: la importancia de estos materiales y recursos no reside en sí mismos, sino en la adecuación y contribución de aprendizaje que establece el profesor.

Siempre ha de planificarse con detalle el uso de estos materiales, pues en otro caso su utilización puede redundar en pérdida de tiempo o atención. El análisis de los materiales y recursos debe ir siempre acompañado de un análisis del contenido a desarrollar, de hacer explícitas las capacidades que el profesor espera desarrollar en sus escolares, del diseño de la gestión de aula, y del resto de variables que inciden en las actividades de enseñar y aprender matemáticas.

En la mayor parte de los materiales presentados, se incluye una descripción breve de los mismos, ejemplos de actividades, y un balance de los objetivos de aprendizaje que pueden pretenderse con dichas actividades. Varios de los materiales son juegos, algunos para dos personas y otros para grupos más numerosos, con la idea de mantener el mayor número de alumnos involucrados en la actividad.

Estructura del tema

Es obvio que en los diferentes bloques tratados en este tema, tendrían cabida todos los materiales y recursos presentados hasta ahora, y de hecho algunos son citados de nuevo.

También se da la circunstancia de que un mismo material se describe en diferentes bloques de contenido, merced a la versatilidad que tienen algunos de ellos.

En cualquier caso, nos hemos centrado en materiales y recursos de tipo manipulativo, y dejamos abierto el explorar qué recursos tecnológicos, además de los ya citados hasta ahora, tendrían cabida para cada contenido, los programas de ordenador, los recursos de Internet y las calculadoras suministran un gran banco de actividades sobre estos contenidos.

Una referencia muy importante para localizar recursos electrónicos organizados por nivel educativo y bloques de contenido, es la Biblioteca de Manipuladores Virtuales que han desarrollado en la Utah State University. Se puede localizar en la página siguiente, y aunque se ha desarrollado en Estados Unidos, está disponible tanto en inglés como español:

http//nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html

Para cada nivel y bloque de contenido, aparece un amplio listado de applets de un manejo muy sencillo que permiten realizar interesantes actividades. Para cada uno de ellos existen instrucciones de manejo y ejemplos de actividades. Adicionalmente, en varios de ellos aparecen recomendaciones para el profesor.

En resumen, una página para guardarla en la carpeta de favoritos.

1. MATERIALES PARA EL BLOQUE DE NÚMEROS

1.1 FICHAS DE COLORES

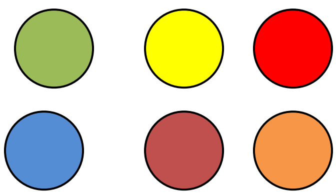


Figura 3.1

Descripción del material

Se necesitan fichas de diferentes colores. Pueden servir las Fichas rojas, azules, amarillas y verdes comúnmente utilizadas para el juego del parchís.

Material necesario

El alumno debe tener a su disposición entre 20 y 30 fichas de cada color.

Organización del aula

Se constituyen equipos formados por dos o tres alumnos

Actividad 1

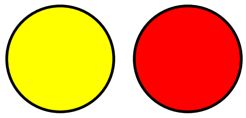


Figura 3.2

¿Qué color tendrá la ficha que ocupe el lugar 4153? ¿Y el 20000 ? (Figura 3.2)

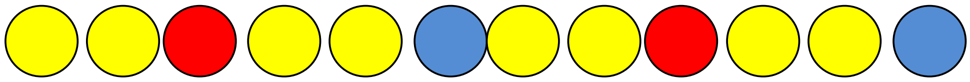


Figura 3.3

¿Qué color tendrá la ficha que ocupe el lugar 54? ¿Y el 27? ¿Y el 41? (Figura 3.3)

* 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13...

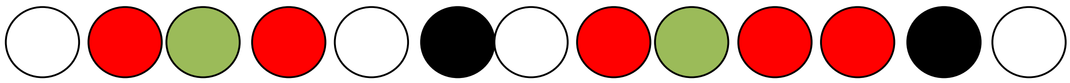


Figura 3.4

¿Puedes continuar el patrón? (Figura 3.4)

¿Puedes explicar cómo está construido?

Si continúas el patrón con este criterio, ¿podrías asignar una ficha a todos los números? Si no puedes, ¿cuáles quedarían sin ficha?

* Si completas el patrón hasta el número 169, ¿cuántas fichas has utilizado de cada color?

* ¿Podrías decirme, sin contarlos, cuántos números primos hay menores que 169?

Se pretende que el alumno:

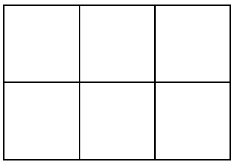
* Reconozca patrones y busque el término general.

* Estudie los criterios de divisibilidad.

* Trabaje con números primos y compuestos.

* Analice la ley de formación de una sucesión

Actividad 2



* En una cuadrícula 2 x 3 (6 cuadraditos), ¿de cuántas maneras puedes colocar una Ficha? ¿Y 2, 3, 4, 5, 6 fichas?

* ¿Puedes encontrar una regla general?

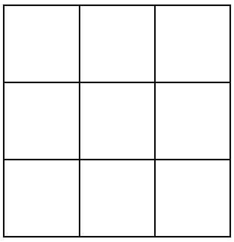
Se pretende que el alumno:

* Se introduzca en problemas combinatorios sencillos.

* Diferencie la situación problemática que se le presenta si todas las fichas son del mismo color o si cada ficha es de un color diferente.

* Descubra estrategias de conteo.

Actividad 3



* En un tablero 3x3 coloca tres fichas de forma que no estén las «tres en raya».

* ¿De cuántas formas diferentes puedes hacerlo?

* ¿Y si el tablero es 4x4 ó 5x5?

* ¿Puedes generalizar?

Se pretende que el alumno:

* Adquiera técnicas de conteo.

* Tome conciencia de la necesidad de seguir una estrategia adecuada que garantice que se cuentan todos los casos posibles y no se cuenta ninguno de ellos dos veces.

* Utilice un diagrama de árbol como técnica constructiva de canteo.

1.2 DOMINÓ DE FRACCIONES

Figura 3.5

Descripción del material

Dominó de 28 fichas en las que hay representadas siete fracciones de formas diferentes.

Material necesario

Un dominó para cada grupo de cuatro alumnos.

Actividad 1

En grupos de 4 alumnos se reparten todas las fichas del dominó. Cada alumno debe copiar las 7 fichas que le han correspondido anotando las fracciones simplificadas que aparecen en ella.

Identificar todas las fichas de la familia 1

Identificar todas las fichas de la familia $\frac{1}{2}$

Identificar todas las fichas de la familia $\frac{1}{4}$

Identificar todas las fichas de la familia $\frac{1}{5}$

Identificar todas las fichas de la familia $\frac{1}{10}$

Identificar todas las fichas de la familia $\frac{3}{5}$

Identificar todas las fichas de la familia $\frac{3}{4}$

Ordenar las 7 familias de mayor a menor

Actividad 2

Entre las 28 fichas, hay 7 fichas dobles, es decir, que en los dos cuadrados está representada la misma cantidad. Identifica las 7 fichas dobles y escríbelas a continuación:

Se pretende que el alumno:

* Comprenda la equivalencia de fracciones.

* Opere con fracciones.

* Ordene fracciones.

* Represente fracciones en una recta.

1.3 SUMA 15

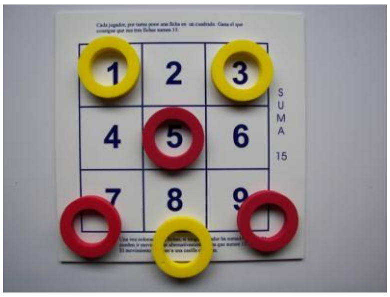


Figura 3.6

Cada jugador, por turno pone una ficha en un cuadrado. Gana el que consigue que sus tres fichas sumen 15.

Una vez colocadas las fichas, si ningún jugador ha sumado 15, pueden ir moviéndolas alternativamente hasta que sumen 15.

El movimiento debe ser a una casilla contigua.

1.4 TABLERO DE DECIMALES

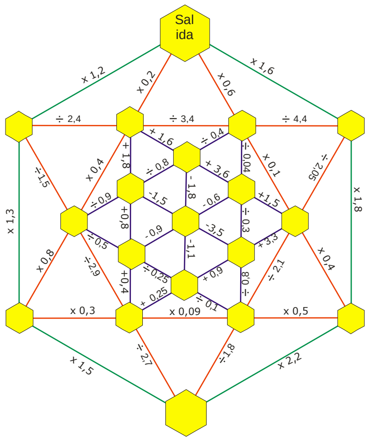


Figura 3.7

Se pueden formar equipos de hasta cuatro. Cada uno con una calculadora.

El juego consiste en elegir un camino por el laberinto y anotar la operación correspondiente. No se puede pasar dos veces por el mismo camino, ni moverse hacia atrás. Gana el que encuentre el resultado mayor.

Otra variante del juego puede ser encontrar el resultado menor.

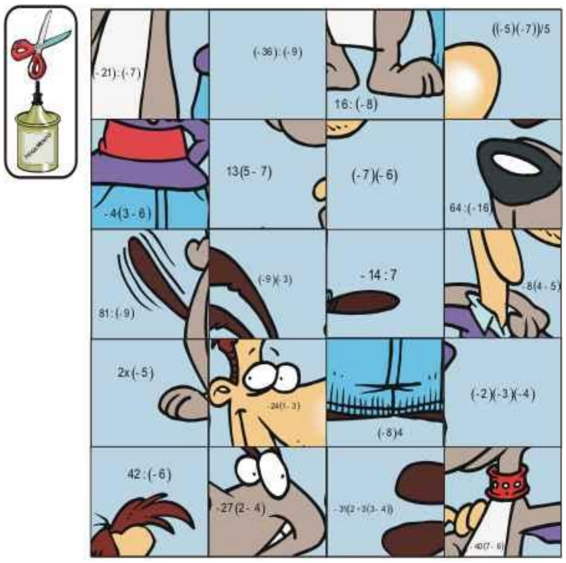
Para empezar, teclear 100 en la calculadora.

1.5 PUZZLES NUMÉRICOS

Operaciones con enteros

Es un juego individual muy entretenido para los alumnos, y en él realizan un montón de operaciones.

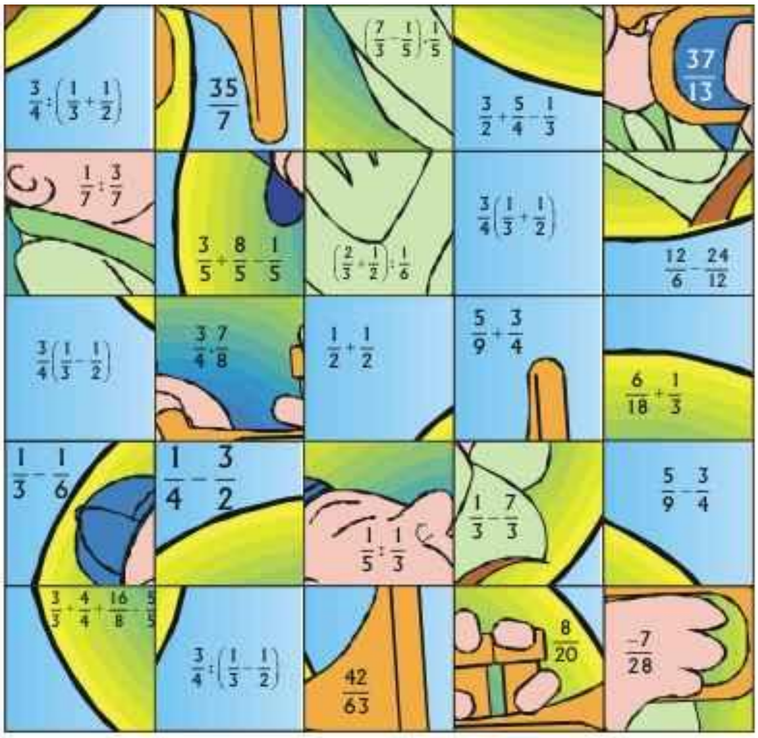
- Hay que recortar las piezas de la parte de arriba, realizar las operaciones y pegar la pieza en donde corresponda de la parte de abajo.



31	27	-7	4
-4	54	48	7
-26	-40	8	42
-9	3	12	-24
-10	-2	-32	-2

Figura 3.8

Operaciones con fracciones



1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-7}{36}$	$\frac{47}{36}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{21}{32}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{37}{13}$	$\frac{-1}{4}$	5
3	$\frac{32}{75}$	7	-2	$\frac{-9}{2}$
$-\frac{1}{8}$	$\frac{29}{12}$	0	$\frac{9}{10}$	$\frac{5}{8}$

Figura 3.9

1.6 CÍRCULO DE FRACCIONES

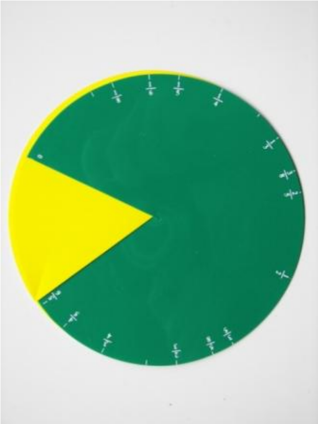


Figura 3.10

-Gira los círculos en ambos sentidos, observa cómo se representan diferentes fracciones.

-Identifica las fracciones que aparecen en el círculo.

-En el círculo aparecen las fracciones 1/8, 3/8, 5/8 y 7/8, ¿Por qué no están escritas las fracciones 2/8, 4/8 y 6/8?

-Preguntar lo mismo con otras fracciones equivalentes.

-Representa en el círculo otras fracciones.

-Dile a tu compañero que te diga de qué fracción se trata.

-Dar la vuelta al círculo, por la parte que no está graduada representa la fracción 1/4, ½ y 3/4.

-Representa una fracción comprendida entre 1/4 y ½. ¿De qué fracción se trata?

-Preguntar lo mismo con otras fracciones.

-Pueden dar la vuelta al círculo para comprobar sus respuestas.

1.7 TIRAS DE FRACCIONES

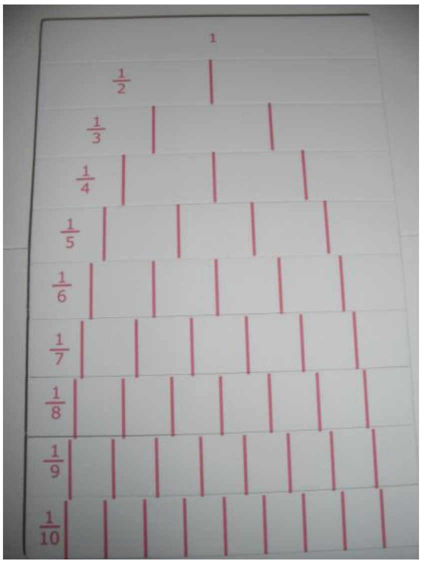


Figura 3.11

Comentar con los alumnos la forma cómo se han dividido las tiras.

Señalar que las dos mitades es igual a 1, que los tres tercios igual a 1, que los cuatro cuartos …

Comparar mitades, tercios, cuartos cual es más grande

¿Cuántos sextos se utilizan para igualar un tercio?

…

Los alumnos deben darse cuenta que algunas fracciones son equivalentes o iguales

…

Identificar la franja que está dividida en tres partes.

Señalar una de las partes.

Explica lo que significa una tercera parte de un entero.

Señalar otra de las partes de manera tal que tengan dos terceras partes señaladas.

Se sugieren preguntas como las siguientes:

¿Cuántas partes tienen señaladas?

¿Qué porción de la franja está señalada?

…

Identificar la tira en cuatro partes.

¿Qué cantidad del entero representan cada una de esas partes?

…

2. MATERIALES PARA EL BLOQUE DE GEOMETRÍA

2.1 CÍRCULO DE ÁNGULOS

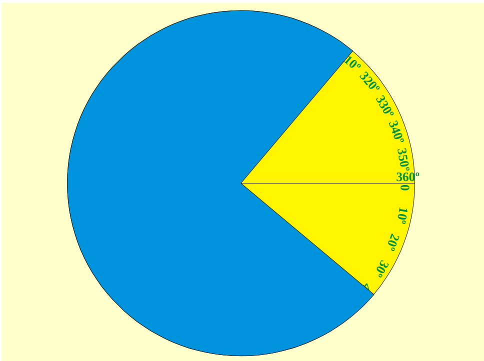


Figura 3.12

Descripción: Compuesto por dos círculos de plástico, uno de los cuáles tiene en una de sus caras ángulos que van de 0º a 360º. Es muy útil para el estudio y medida de ángulos. Con él se pueden hacer actividades como:

- Construye un ángulo de 45º
- ¿Cómo de grande es un ángulo 270º?
- ¿Y el ángulo 360º?
- -Construye un ángulo de 60º. ¿Qué ángulo señalaría cuando se gira el círculo 40º hacia la derecha? ¿Y hacia la izquierda?

- …
- -Construye un ángulo de 45º. ¿Qué ángulo señalaría cuando hacemos 4 giros de 20º hacia la derecha? ¿Y hacia la izquierda?
- -¿Cuántos grados tiene un giro de 1/5 de vuelta? ¿Y uno de 3/8 de vuelta?
- -¿Cuántos grados tiene un giro de media vuelta, si la vuelta completa mide 360 grados?
- -¿Cuántos grados tiene un giro de un cuarto de vuelta?
- -¿Cuántos grados tiene un giro de un octavo de vuelta? ¿Y uno de tres octavos de vuelta?

2.2 VARITAS Y VÉRTICES

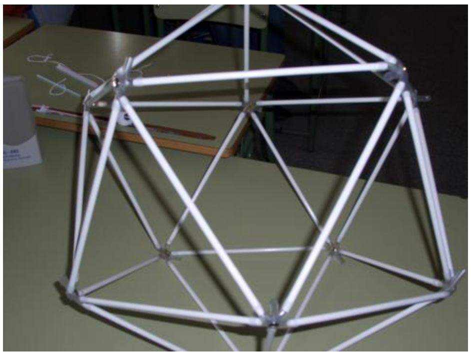


Figura 3.13

Con varillas de 6 mm de diámetro y conexiones formadas por tubos de goma podemos construir aristas y vértices. Con ellos podemos estudiar todos los poliedros, tanto regulares como irregulares.

2.3 TESELAS

Muy útil para estudiar teselaciones y más en concreto mosaicos regulares y semiregulares.


Figura 3.14

Actividad

Utilizando una sola clase de polígonos, rellena el plano sin huecos ni solapamientos.

¿Cuántas clases de polígonos has utilizado?

¿Cuántos grados suman todos los ángulos que concurren en un mismo punto?

¿Cuántos grados mide el ángulo de cada polígono? ¿Y el ángulo central?

¿Qué condición han de cumplir los ángulos de un polígono para que rellenen el plano?

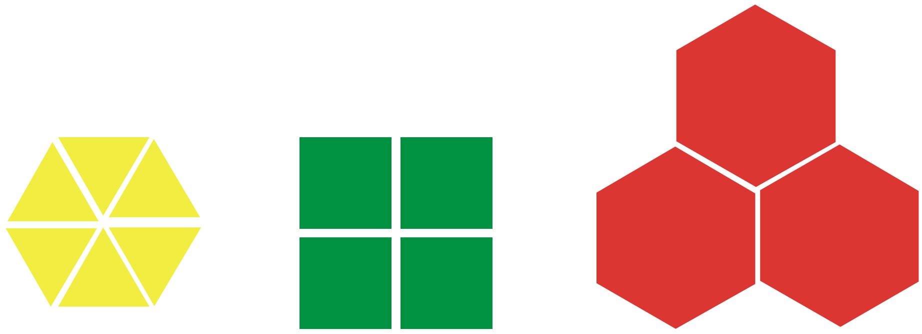


Figura 3.15

Repite las actividades anteriores utilizando polígonos de varias clases.

2.4 MECANO

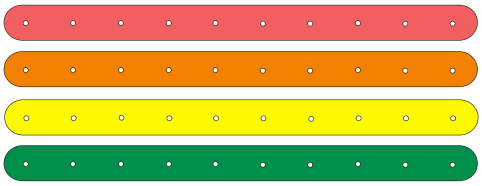


Figura 3.16

Son varillas de diferentes tamaños con agujeros. Para unir las varillas utilizamos encuadernadores

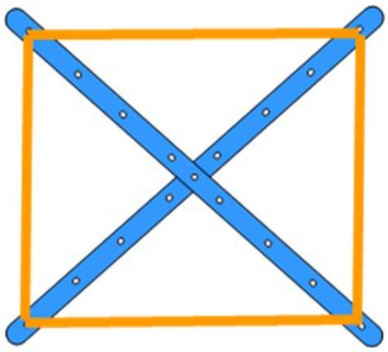


Figura 3.17

Basándonos en las diagonales

¿Qué tienen en común?

¿Qué permanece invariante?

¿Qué cambia?

Pasar por continuidad al rectángulo

Construye con 4 varillas, unidas siempre por los agujeros de los extremos todos los cuadriláteros diferentes que puedas. Para ayudarte, rellena la tabla según vayas construyendo cuadriláteros, indicando los ángulos que forman los lados.

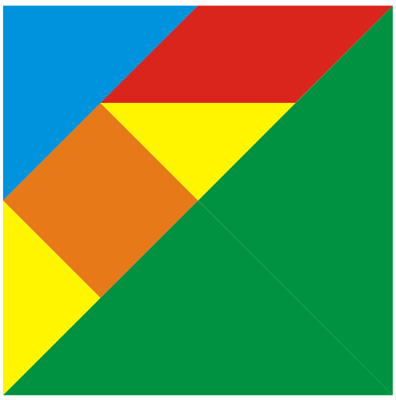
Ángulos rectos	Ángulos agudos	Ángulos obtusos	Lados paralelos	Nombre	Perímetro	Dibujo

2.5 PUZZLES 2D

En general, con los puzzles 2D podemos conseguir que:

- Distingan los conceptos de congruencia y semejanza.
- Reconozcan figuras
- Realicen cálculos de áreas y perímetros
- Trabajen con ejes de simetría.
- Comprendan el concepto de área.
- Descubran relaciones de proporcionalidad.

Tangram



Figuras 3.18

* Tomando como unidad el cuadrado grande, halla el área de las siete piezas.

* Forma figuras que tengan de área 7/16 unidades cuadradas.

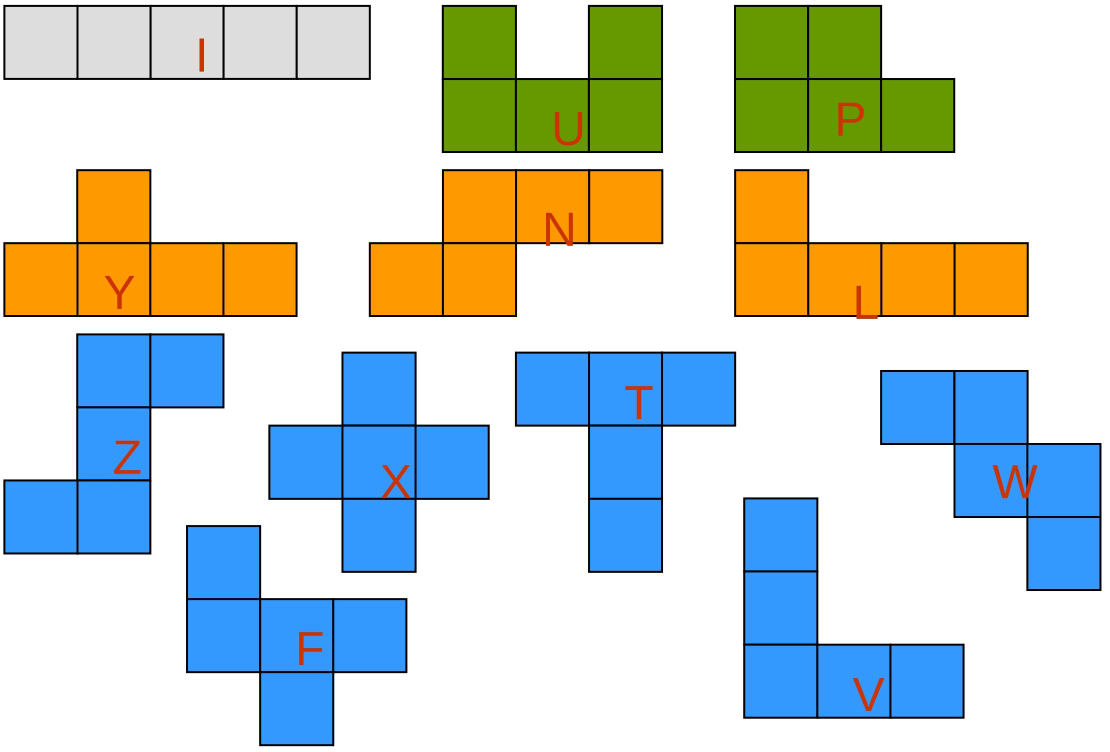


Figura 3.19

¿Tienen todas las figuras la misma superficie? ¿Tienen el mismo perímetro?

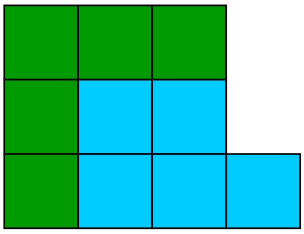


Figura 3.20

Con dos pentominós, haz figuras iguales a ésta

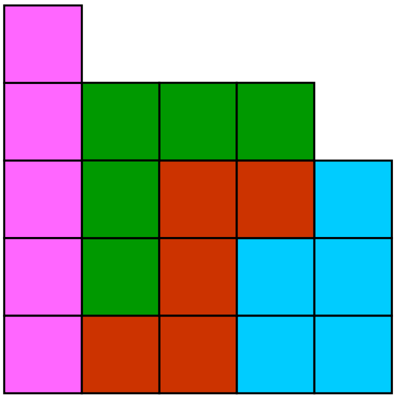


Figura 3.21

Con los ocho pentominós restantes, construye dos figuras iguales que ésta.

Haz una figura semejante a ésta cuyas dimensiones sean el doble.

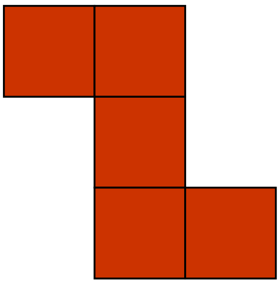


Figura 3.22

¿Cuántos pentominós necesitas para construirla?

Tomando como unidad el lado del cuadrado:

¿Cuál es la razón de los lados homólogos?

¿Cuál es la razón de las superficies?

Haz una figura semejante a ésta cuyas dimensiones sean el triple.

¿Cuántos pentominós necesitas para construirla?

Tomando como unidad el lado del cuadrado:

¿Cuál es la razón de los lados homólogos?

¿Cuál es la razón de las superficies?

¿Puedes sacar alguna conclusión?

…

2.6 PUZZLES 3D

Cubo soma

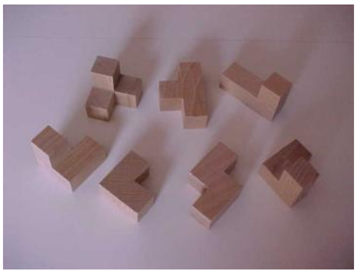


Figura 3.23

El cubo soma fue descubierto por Piet Hein, poeta y matemático danés que un día descubrió que figuras formadas por cubos podían recubrir el espacio.

De todas las formas que se pueden construir con 3 o 4 cubitos, eligió tricubos y tetracubos con ángulo diedro cóncavo.

Las piezas que conforman el cubo soma son siete, seis tetracubos y sólo un tricubo.

El problema base es formar con las 7 piezas un cubo (hay más de 240 formas diferentes). Además se pueden formar muchas más construcciones. Los alumnos pueden formar sus propias construcciones y después intentar plasmarlo en papel.

Dibuja las piezas del cubo soma en las siguientes tramas.

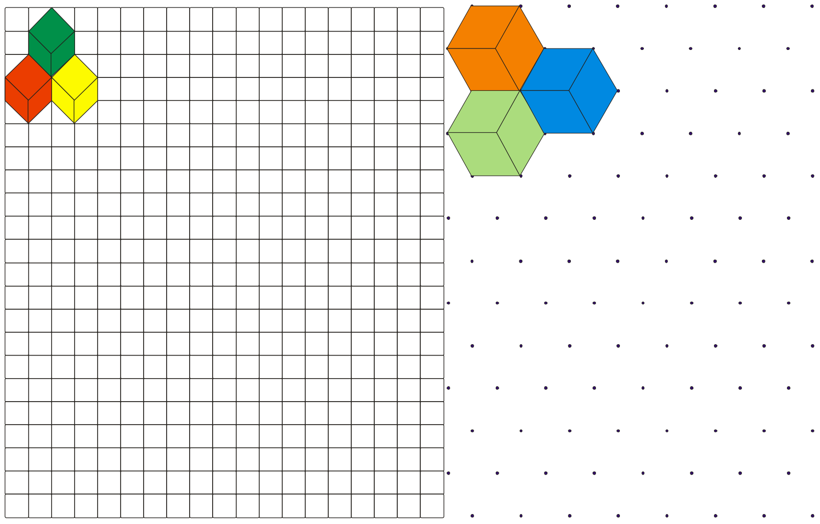


Figura 3.24

Construye todas las figuras que te presentamos con piezas del cubo soma.

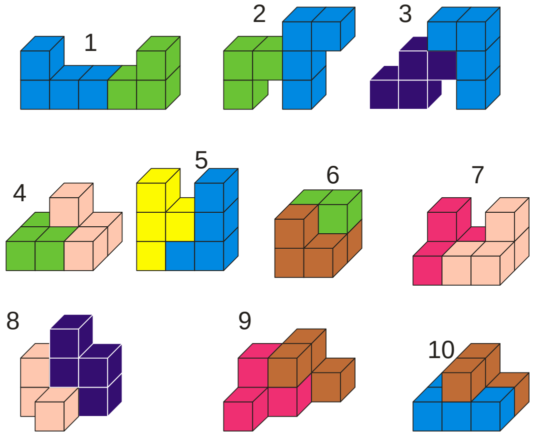


Figura 3.25

Dibuja después, tres vistas de cada una de las figuras

FIGURA Nº:		
DE FRENTE	DESDE ARRIBA	DESDE UN LADO

Pentominós sólidos y pentacubos

Un pentacubo es una figura plana formada por cinco cubos unidos por sus caras. La versión 3D de los pentominós se conoce con el nombre de pentominós sólidos.

Figura 3.26

- Con ellos se pueden hacer múltiples actividades:
- Formar prismas de diferentes medidas: 3x4x5, 2x5x6, 2x3x10
- Estudiar la relación superficie/volumen
- Estudio de la congruencia de figuras

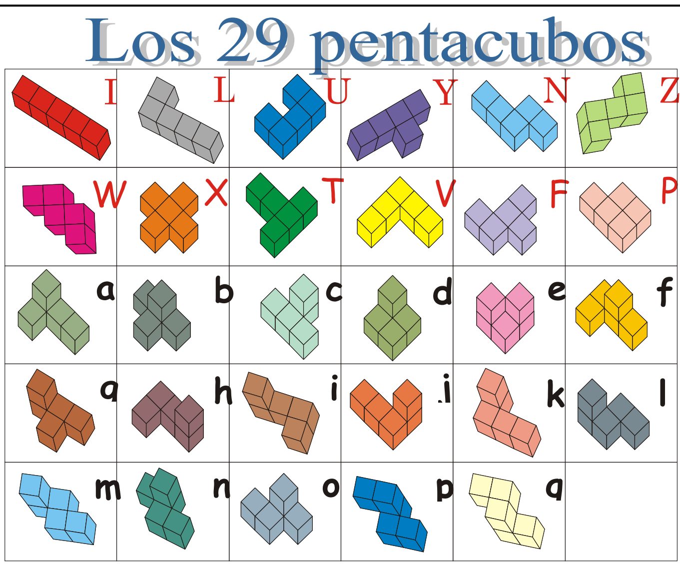


Figura 3.27

2.7 **LIBRO DE ESPEJOS**

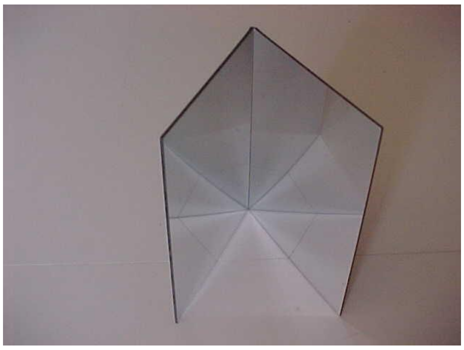


Figura 3.28

Dibuja un punto y una línea recta que no pase por él. Sitúa el eje del libro de espejos sobre el punto. Coloca sus hojas de forma que corten a la recta. Abre y cierra las hojas del libro. Describe las figuras que vayas observando. ¿Puedes relacionarlas con el ángulo que forman las hojas del libro en cada caso?

Sitúa el eje del libro de espejos sobre el punto (Figura 3.29). Coloca sus hojas de forma que corten a la recta. Abre y cierra las hojas del libro. Describe las figuras que vayas observando. ¿Puedes relacionarlas con el ángulo que forman las hojas del libro en cada caso?

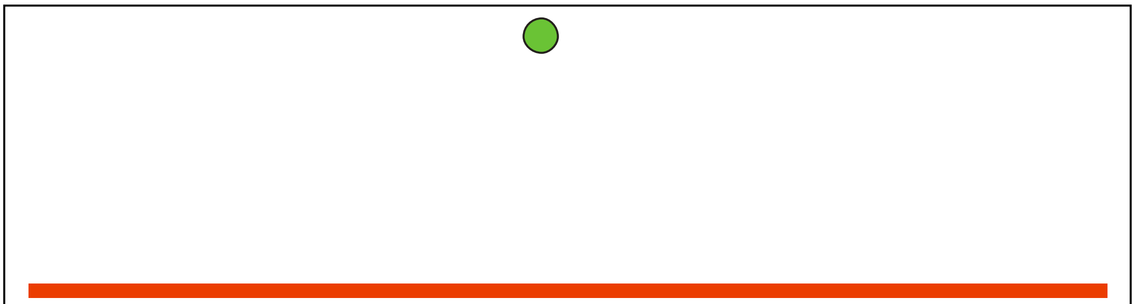


Figura 3.29

*Coloca nuevamente los espejos con el vértice sobre el círculo y la base cortando la línea roja, abre y ciérralos hasta que veas un triángulo equilátero.

Mide el ángulo que se forma entre los espejos.

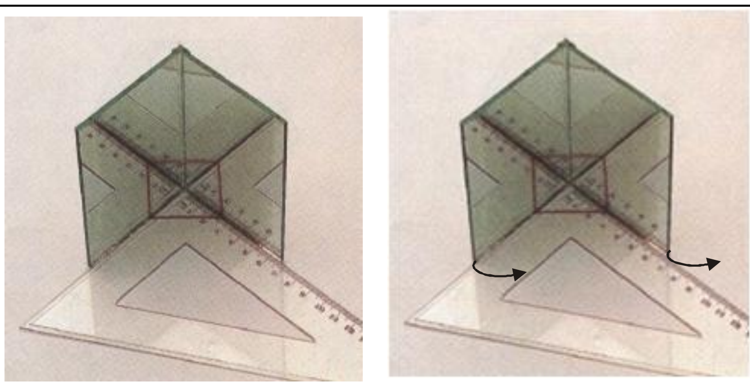


Figura 3.30

Coloca entre los espejos una escuadra

¿Qué polígono observas?

Gira los espejos lentamente como

indica la flecha, conservando entre ellos el ángulo de la escuadra de la foto anterior. ¿Qué observas?

¿Qué ves cuando la base de uno de los espejos queda perpendicular a la línea roja?

Gira los espejos hasta que veas un cuadrado.

En la plantilla de abajo coloca entre los espejos el ángulo de 60° de una escuadra. ¿Qué observas?

Gira lentamente los espejos. ¿Puedes ver una estrella?

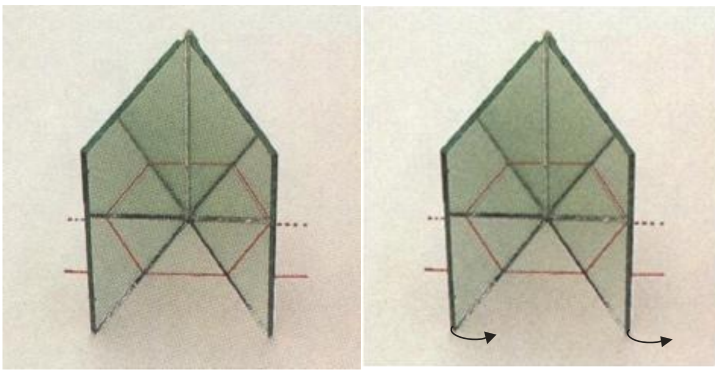


Figura 3.31

¿Cómo es el polígono que observas cuando los espejos quedan en la posición que muestra la foto de la izquierda?

Continua colocando entre los espejos los ángulos de 30° y 60° de la escuadra. Luego, dibuja las figuras que veas.

3. MATERIALES PARA EL BLOQUE DE ÁLGEBRA

3.1 TABLA 100

Podemos construirla en un papel tamaño A4. Consta de 10 columnas y 10 filas. En ella hemos colocado los números del 1 al 100 según se indica en la figura:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Actividades:

Observa la ventana que está coloreada:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1. Suma 35+46 y 36+ 45 ¿Qué observas?

2. Mueve la ventana y luego haz lo mismo. ¿Qué observas?

3. ¿Puedes explicar por qué pasa esto?

4. Ahora multiplica las parejas de números opuestos 35x46 y 36x45.¿Qué observas?

5. Mueve la ventana y haz lo mismo. ¿Qué observas?

6. ¿Puedes explicar por qué ocurre esto?

7. Prueba con otras ventanas ¿Qué ocurre?

8. Mueve una ventana como la de abajo un lugar a la derecha y haz la suma en cada vez.

12	**13**
22	**23**

Número menor	Suma
12	70
13	
14	
15	
16	
n	s

9. ¿Qué observas?

10. Si "S" es la suma ¿Podrías escribir la fórmula relacionando el número menor con la suma?

S =

11. Utiliza tu fórmula para encontrar la suma de una ventana numérica si el número menor "n" es.

a) 6 b) 22 c) 47 d) 89

12. ¿Cómo podrás encontrar el número menor de la ventana si la suma es?

a) 34 b) 59 c) 154 d) 326

13. Escribe la fórmula para encontrar el número menor sin conocer la suma S.

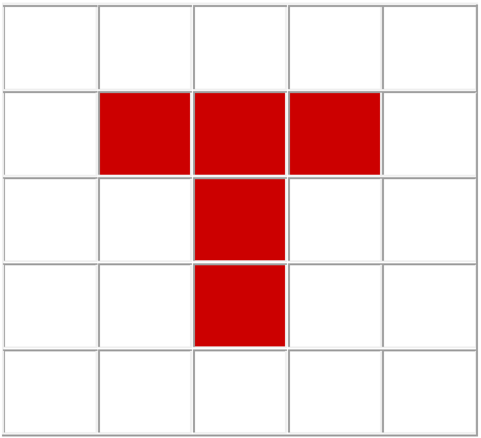
14. ¿Podrías justificar algebraicamente la Fórmula?

15. Una ventana de diferente forma y tamaño requiere una fórmula diferente.

Encuentra una ventana para cada una de estas fórmulas.

a) S=6n+36   b) 4n+15   c)S=5n+50

16. Inventa tus propias ventanas, luego encuentra la fórmula para cada una.



Se pretende que el alumno:

* Explore patrones numéricos.

* Utilice el lenguaje algebraico para justificar relaciones numéricas.

* Trabaje reducción de términos semejantes.

* Resuelva ecuaciones lineales.

3.2 LIGA DE CAMPEONES

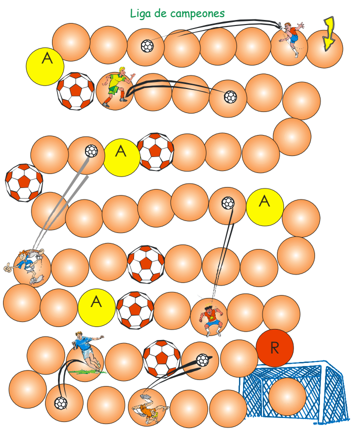


Figura 3.32

Juego para dos, tres o cuatro jugadores

El orden de salida se hace por turno en cada partida.

Para empezar es necesario sacar una carta con una ecuación de solución 6

Cada jugador va sacando por turno una carta, y reponiéndola a continuación en la baraja, avanzando su ficha las casillas que le indiquen la solución (1, 2,3, 4, 5 o 6) de la ecuación que aparece.

Si se cae en un círculo con un futbolista, se interpreta el dibujo para avanzar o retroceder

Si se cae en una casilla amarilla, se debe de dejar de jugar durante una vuelta.

Si se cae en un balón, se avanza dos casillas.

Si se cae en la casilla roja se debe volver a empezar.

Gana el jugador que consigue primero meter un gol con una tirar exacta.

Ejemplos de cartas:

Figura 3.33

3.3 PISTA DE ÁLGEBRA

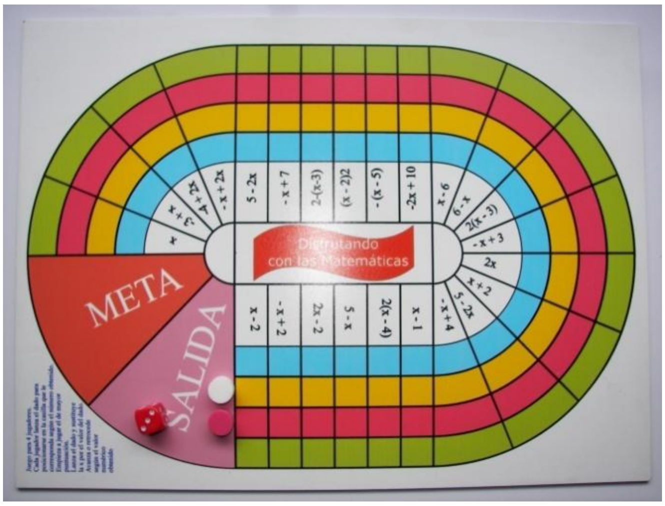


Figura 3.34

Juego para 4 jugadores.

Cada jugador lanza el dado para posicionarse en la casilla que le corresponda según el número obtenido.

Empieza a jugar el de mayor puntuación.

Lanza el dado y sustituye la

x por el valor del dado.

Avanza o retrocede según el valor numérico obtenido.

3.4 SUBIR A CERO

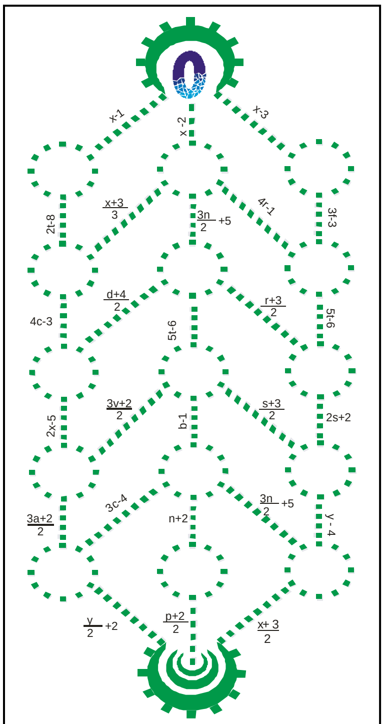


Figura 3.35

- Un tablero
- Un dado
- Dos fichas diferentes, una para cada jugador

Reglas del juego

- Juego para dos jugadores
- Los jugadores tiran el dado para decidir quién empieza el juego
- El primer jugador lanza el dado, y con el resultado del dado calcula el valor de la expresión de alguno de los caminos que salen de la casilla inferior; sube así a alguna de las tres casillas primeras apuntándose como puntuación el valor numérico de la expresión utiliza para subir.
- Para ser válido ese valor numérico debe ser entero y no fraccionario.
- A continuación, el segundo jugador hace lo mismo.
- Las casillas pueden ser ocupadas por dos fichas.
- Al cabo de 5 turnos, los jugadores llegan al último nivel antes del cero, e intentan sacar con el dado el valor que permite anula la función x-1, x-2 o x-3 correspondiente.
- El juego acaba cuando uno de los jugadores ha **subido al cero.**
- El jugador que sube al cero primero obtiene por este hecho 10 puntos adicionales.

Gana el que más puntuación ha acumulado a lo largo de las jugadas

T a b l a d e resultados

Jugada nº	Puntos jugador 1	Puntos jugador 2
1		
2		
3		
4		
5		
Puntos adicionales		
Total		

4. MATERIALES PARA EL BLOQUE DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

4.1 FICHAS DE COLORES

Se necesitan fichas de diferentes colores. Pueden servir las Fichas rojas, azules, amarillas y verdes comúnmente utilizadas para el juego del parchís.

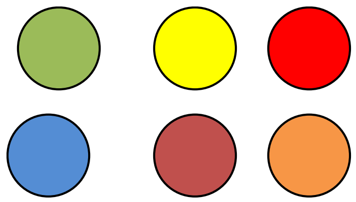


Figura 3.36

* En una cuadrícula 2 x 3 (6 cuadraditos), ¿de cuántas maneras puedes colocar una ficha? ¿Y 2, 3, 4, 5, 6 fichas?

* ¿Puedes encontrar una regla general?

Se pretende que el alumno:

* Se introduzca en problemas combinatorios sencillos.

* Diferencie la situación problemática que se le presenta si todas las fichas son del mismo color o si cada ficha es de un color diferente.

* Descubra estrategias de conteo.

Actividad 1

* Toma una ficha. ¿Cuántas más necesitas para rodearla completamente? ¿Puedes generalizar? Busca simetrías y empléalas para contar el número total de fichas de la construcción.

* Utiliza fichas de color diferente para cada paso. Investiga.

* Toma tres fichas que se tocan todas entre sí. Rodéalas con otras fichas. Repite el proceso. Investiga.

* ¿Y si partes de 4, 5 ó más fichas?

Actividad 2

* Dispones de dos montones de fichas, cada uno de un color.

* Un compañero coge un puñado de fichas de cada color y las pone en una bolsa (que en total haya al menos 20 fichas).

* Saca sin mirar 10 fichas de la bolsa. Apunta las que hay de cada color y vuelve a ponerlas en la bolsa. Remuévelas y saca otras 10 fichas. Repite el proceso varias veces.

* ¿Qué puedes concluir?

* ¿En cuál de los dos montones iniciales había más fichas?

Se pretende que el alumno;

* Adquiera de forma intuitiva el concepto de probabilidad.

* Relacione los conceptos de proporción, frecuencia y probabilidad.

* Se libere de conceptos previos erróneos sobre la probabilidad

4.2 JUEGOS PARA INTRODUCIR LA PROBABILIDAD

Saltos con los canguros

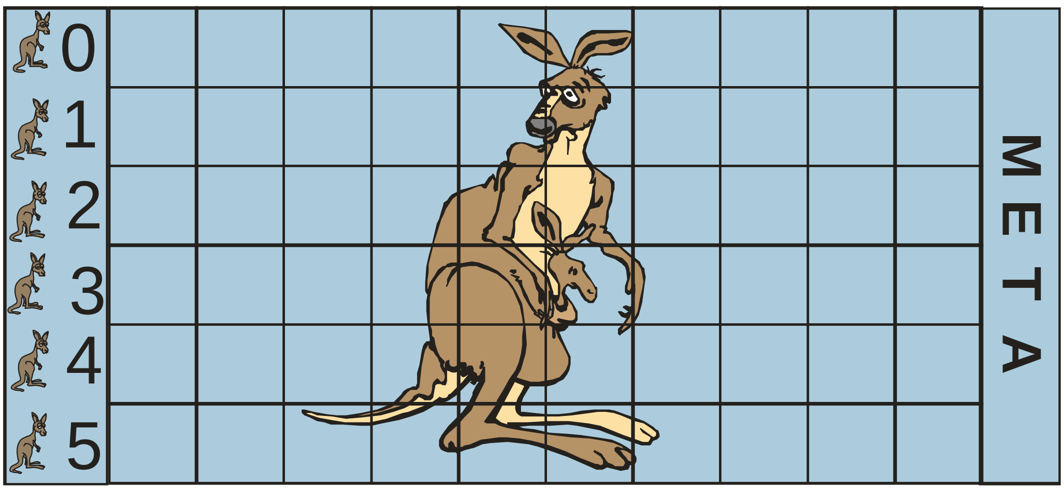


Figura 3.37

Juego para 6 jugadores

Se sortean los canguros

Los jugadores tiran dos dados y la persona que tenga el nº igual a la resta de los dados avanza una casilla hacia la meta.

Gana el canguro que llega antes a meta

Antes de empezar la partida se les dice a los niños que elijan un canguro, al azar. Después se les dice las reglas, y alguno querrá cambiar de canguro.

Con este juego se comprueba que resta sale más, y de esa forma se sigue viendo (como en el carrera de caballos) de forma intuitiva el concepto de probabilidad.

Después en clase se analiza el experimento “resta de las puntuaciones de dos dados”

Pescando en el lago

Juego para dos pescadores.

Figura 3.38

Material: tablero, 12 fichas para cada jugador y dos dados.

Cada pescador juega con los números que tiene más próximos. Cada pescador dispone de 12 peces (fichas) que deberá colocar como quiera sobre la parte de tablero que le corresponda. Puede colocar todas en un número o distribuidas como crea más conveniente para ganar.

Por turnos cada jugador tirará los dados. Se restan los dados y sobre la casilla de su parte del tablero cuyo número coincide con dicha resta retirará un pez (si lo hubiere).

Gana el jugador que primero retire todas sus fichas del tablero.

VARIANTE

Cada jugador coloca los peces del otro jugador de manera que pescarlos sea lo más difícil posible.

Cara o cruz

Juego para 6 jugadores

Se sortean los números

Los jugadores tiran 5 monedas y cuentan las "caras". El jugador que lleve ese

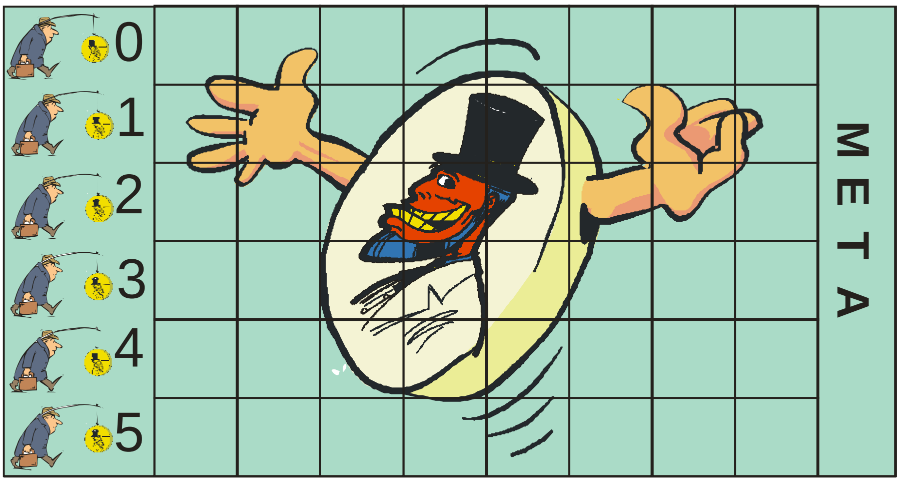


Figura 3.39

número avanza una casilla.

Gana el jugador que llega antes a meta

Antes de empezar la partida se les dice a los niños que elijan un jugador, al azar. Después se les dice las reglas, y alguno querrá cambiar de número.

Con este juego se comprueba el número de caras que sale más, y de esa forma se sigue viendo (como en el carrera de caballos) de forma intuitiva el concepto de probabilidad.

Después en clase se analiza el experimento "tirar 5 monedas y anotar el resultado"

El queso, el ratón y el gato

Figura 3.40

En el laberinto está en juego la vida de un grupo de ratones que simularemos con fichas. Coloca una ficha-ratón en la entrada. Lanza una moneda y, según salga cara o cruz, mueve la ficha siguiendo las flechas indicadas. Repite el proceso hasta que la ficha salga ilesa por la salida o sea comida por el gato.

Contesta:

A) ¿Qué te parece más fácil: salvarte o ser devorado por el gato?

B) ¿Hay alguna casilla del laberinto en la que, si un ratón llega, ya está perdido sin haber caído aún en la casilla del gato.

C) ¿Hay alguna casilla, que no sea la salida, en la que ya se sepa que el ratón se ha salvado?

D) ¿Si colocas 16 ratones en la entrada, ¿Cuántos crees que llegarán al queso? ¿cuántos esperas que sean comidos por el gato? ¿Y si colocas 80 ratones?

Hipódromo

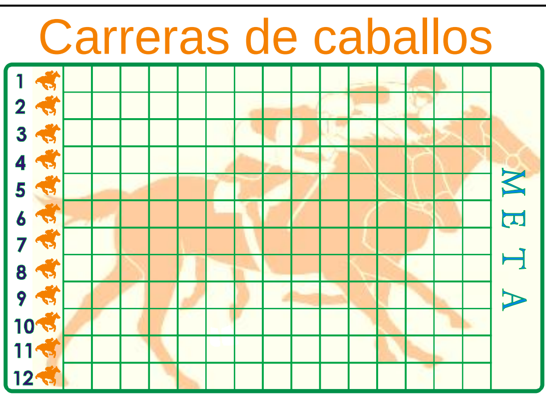


Figura 3.41

Juego para 12 jugadores

Se sortean los caballos

Los jugadores tiran dos dados y la persona que tenga el nº igual a la suma de los dados avanza una casilla hacia la meta.

Gana el caballo que llega antes a meta

Sugerencias:

Antes de empezar la partida se les dice a los niños que elijan un caballo, al azar.

Después se les dice las reglas, y alguno querrá cambiar de caballo.

Con este juego se comprueba qué suma sale más, y de esa forma se introduce el concepto de probabilidad.

Después en clase se analiza el experimento “suma de las puntuaciones de dos dados”

Mosquetero o superhéroe

Juego para dos jugadores (mosquetero y superhéroe)

Figura 3.42

Material: tablero, 12 fichas cada jugador y dos dados

El mosquetero juega con los números de abajo y el superhéroe con las de arriba.

Cada jugador dispone de 12 fichas que deberá colocar como quiera sobre la parte de tablero que le corresponda (esto se hace antes de empezar a tirar los dados). Puede colocar todas en un número o distribuidas como crea más conveniente para ganar.

Por turnos cada jugador tirará los dados. Se suman los dados y sobre la casilla de su parte del tablero cuyo número coincide con dicha suma retirará una ficha (si la hubiere).

Gana jugador que primero retire todas sus fichas del tablero.

Liga de campeones. Probabilidad

Juego para dos, tres o cuatro jugadores

Cada jugador, al llegar su turno, lanzará un dado y, después de ver el resultado, decidirá mover las casillas que indica el dado o tirará el otro. Si decidiera esto último, debe señalar si el nuevo dado va a sacar más, igual o menos que en la primera. Si acierta, avanzará la suma de, los dos resultados y, si falla no avanzará nada en ese turno.

atemáticas.

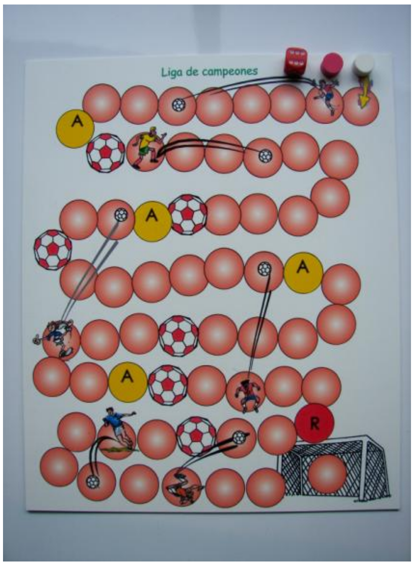


Figura 3.43

Si se cae en un círculo con un futbolista, se interpreta el dibujo para avanzar o retroceder
Si se cae en una casilla amarilla, se debe de dejar de jugar durante una vuelta.
Si se cae en un balón, se avanza dos casillas.
Si se cae en la casilla roja se debe volver a empezar.
Gana el jugador que consigue primero meter un gol con una tirara exacta.

5. ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

Localiza un material que se pueda enmarcar en alguno de los bloques de contenidos. Haz una descripción del mismo que incluya, como mínimo los siguientes puntos:

a) Bloque de contenido con el que se asocia, y nociones matemáticas involucradas.
b) Descripción del material (reglas de uso, funcionamiento, …)
c) Ejemplos de actividades que se pueden plantear.
d) Objetivos de aprendizaje que se persiguen con estas actividades.

Tema 4.

NUEVAS TECNOLOGÁS Y MEDIOS AUDIOVISUALES EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

El incipiente desarrollo de la tecnología está modificando substancialmente el entorno de la sociedad y, como consecuencia, nuestras actividades cotidianas. El ámbito educativo no es ajeno a este hecho, pero aún es necesario perseverar y profundizar en las discusiones acerca de cómo ha de llevarse a cabo una adecuada implementación de estas herramientas en el aula, para ver cómo pueden adaptarse a los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Ordenadores, Internet, calculadoras y otro tipo de recursos tecnológicos poseen un gran potencial para la educación en general, y para la educación matemática en particular. Pero no debe usarse este potencial como excusa para llevar al aula de matemáticas todo aquello que sorprende por su versatilidad; es necesario planificar con detalle qué uso queremos darle: qué competencias queremos y podemos desarrollar en nuestros escolares, qué tareas debemos diseñar para conseguirlo, y qué sistema de evaluación pondremos en práctica para medir ese desarrollo (Lupiáñez y Codina, 2004; Lupiáñez, 2000).

Los recientes proyectos de incorporación de ordenadores en las aula de Educación Secundaria (Centros TIC) hacen necesarias todas estas reflexiones.

Por otro lado, hoy en día son frecuentes la visionado de un gran número de imágenes en prensa y televisión, y los más recientes soportes electrónicos también facilitan disponer de videos y películas de una forma sencilla.

Pero aunque sin duda no deja de sorprendernos lo que se puede hacer con el uso de estos recursos tecnológicos, es necesario incidir en la necesidad de una planificación adecuada de estas actuaciones dentro de un plan de enseñanza coherente y bien diseñado. A la hora de planificar una o varias sesiones acerca de un tema matemático, el profesor debe realizar varios análisis, tanto sobre la matemática que será objeto de enseñanza, como desde un punto de vista cognitivo, pensando en cómo lograr un aprendizaje significativo en los escolares.

Carece de todo sentido emplear estos recursos en el aula con el único objetivo de renovar o actualizar nuestra labor docente. Todos los materiales y recursos que puede usar el profesor en su labor docente han de jugar un papel muy concreto en ese proceso. Como señala Gómez (2004), el éxito de su empleo depende de que el profesor diseñe y lleve a la práctica el currículo de tal forma que la tecnología contribuya a que los escolares adquieran aprendizaje. El diseño de las actividades deberá surgir de una correcta planificación curricular con nuestro conocimiento de la tecnología dentro del contexto del problema que queremos abordar. Como parte de esa planificación, es necesario detallar los conceptos, procedimientos y sus relaciones que trabajaremos en el aula; definir qué competencias queremos desarrollar en los escolares acerca de ese conocimiento, y analizar qué recursos podemos poner en juego para lograr eficazmente ese desarrollo.

En este tema nos centraremos en el uso de varios materiales y recursos tecnológicos que están a disposición del profesor de matemáticas en su labor docente. Por ejemplo, profundizaremos en las fortalezas y debilidades de los ordenadores y de Internet en el aula de matemáticas. También analizaremos el papel que pueden desempeñar otros recursos, como las calculadoras o la fotografía, y nos acercaremos un poquito al séptimo arte para observar algunas visiones que de la matemática y los matemáticos han aparecido en el cine y la televisión.

1. ORDENADORES E INTERNET

En el epígrafe anterior ya hemos hablado del impacto de las nuevas tecnologías en la sociedad y en el ámbito educativo, siendo necesario en éste reflexionar sobre las implicaciones de el uso de estos instrumentos en el aula.

Es fácil suponer que disponer de ordenadores en el aula hace que se abran nuevas perspectivas de trabajo en matemáticas. Pero por otro lado, sería ingenuo pensar que esto no trae consigo también un gran número de problemas y dificultades.

García y sus colaboradores (1995), señalan que el uso de ordenador en el aula de matemáticas puede tener muchas incidencias, y hablan de ventajas e inconvenientes (pp. 19-28). Desde esa reflexión, hacemos aquí varias consideraciones.

Ventajas

- Desde un punto de vista cognitivo, el disponer de un sistema potente de cálculo hace que sea muy poco el tiempo que se le dedica a cálculos rutinarios. Por el contrario, el tiempo se emplea más en una reflexión profunda de los resultados obtenidos y de sus implicaciones.

  Es posible experimentar con las matemáticas, pues se favorece el observar el resultado de procedimientos y algoritmos cuando se modifican las condiciones iniciales, o cuando se consideran casos extremos. También se facilita la elaboración y comprobación de conjeturas e hipótesis.

- Desde el punto de vista de la planificación, existe la posibilidad de que el profesor pueda disponer de gran número de datos para plantear problemas basados en la realidad.

  Asimismo, es sencillo disponer de muchos ejemplos gráficos e interactivos con los que se facilita la visualización y manipulación de nociones matemáticas. Las matemáticas que se trabajan pueden ser muy diferentes a las que se estudian sólo con papel y lápiz.

- Desde la óptica de la gestión, los ordenadores facilitan un trabajo autónomo de estudiante, facilitando la actividad orientadora del profesor. También permiten el trabajo de los estudiantes en pequeños grupos en los que pueden desarrollarse discusiones y debates.

  Por otro lado, gracias al continuo contacto que tienen los más jóvenes de la sociedad con la tecnología en todos sus ámbitos, no les resulta extraño usar estos recursos, además que constituyen un elemento motivador para ellos.

- Finalmente, una enseñanza que se basa en estos recursos tecnológicos es coherente con el evidente uso de éstos en el ámbito laboral profesional. También se está educando en el empleo adecuado de los ordenadores, los programas, la red,…

Inconvenientes

- Desde el punto de vista cognitivo, los ordenadores pueden llevar a que los estudiantes abandonen el sentido crítico, pues depositan una confianza ciega en las respuestas de las máquinas. También es posible que se pierdan destrezas o habilidades básicas si todo el trabajo se lleva a cabo con estos instrumentos.

- Desde la óptica de la planificación, al profesor pueden surgirle dudas acerca de varios aspectos. Uno de ellos es el relativo al tipo de problemas y cuestiones que plantear, pues muchas de las preguntas habituales pueden resultar evidentes con el uso de un ordenador.

  Otra cuestión abierta para el profesor es cuándo permitir el uso del ordenador y cuándo no, pues eso dependerá de los objetivos planteados en cada situación. Lo que carece de sentido es, por ejemplo, permitir su uso durante todas las sesiones de clase, y prohibirlo en la evaluación. Por el contrario, sería necesario replantear esa evaluación.

Cuando se va a trabajar con ordenadores en el aula de matemáticas, es necesario revisar y replantear los contenidos a desarrollar, establecer unos nuevos objetivos, y diseñar de nuevo un plan metodológico y de evaluación.

- Desde el punto de vista de la gestión del aula, es fácil que los estudiantes estén más ocupados en el manejo técnico del ordenador o de los programas, que en la propia tarea planteada. Por otro lado, hay que procurar que las sesiones de clase no se conviertan en “clases de informática”…

- Finalmente, el uso de nuevas tecnologías en el aula requiere una formación específica del profesorado. Este punto constituye una de las razones principales de rechazo de estos recursos en la enseñanza, si bien surge la pregunta*: ¿Están obligados o comprometidos con estos cambios? De igual manera que exigimos que los médicos conozcan y apliquen las últimas técnicas y tratamientos, los profesionales de la educación debería actualizar su formación y su técnica*. Se abre todo un debate…

En este epígrafe analizaremos las potencialidades de algunos recursos que se abren al profesorado cuando hay ordenador e Internet en el aula de matemáticas, tratando de detallar ventajas, inconvenientes y formas de uso.

1.1 SOFTWARE ESPECÍFICOS DE MATEMÁTICAS

Al mismo tiempo y con la misma velocidad con la que se desarrollan nuevos ordenadores, surgen nuevos programas y aplicaciones para ellos. Y las matemáticas constituyen un campo de investigación potente en este desarrollo. Cada vez son más numerosos y más potentes los programas para trabajar matemáticas a través de un ordenador. Pero esa velocidad de crecimiento implica también un alto nivel de obsolescencia…

Dado que la mayor parte de este software es comercial (de pago), y que nos ocuparemos de programas gratuitos disponibles en Internet en el siguiente epígrafe, aquí simplemente mencionaremos algunas de las aplicaciones más usadas en matemáticas. Concretamente, describiremos algunos sistemas de cálculo simbólico, y aplicaciones de geometría dinámica.

Programa de Cálculo Simbólico

La principal característica de los sistemas de cálculo simbólico es su capacidad para utilizar variables en su operaciones. Esta condición es la que también diferencia las calculadoras científicas tradicionales de las actuales que disponen de procesador de cálculo simbólico.

Los programas de cálculo simbólico más populares son Mathematica (http://www.wolfram.com), Maple (http://www.maplesoft.com), o Derive (http://education.ti.com/educationportal/sites/US/productDetail/us_derive6.html).

Algunas de las actividades matemáticas que son habituales en este tipo de programas (García et al., 1995) son las siguientes:

- Manipulación de variables, fórmulas y expresiones algebraicas.
- Operaciones con polinomios de una o varias variables.
- Cálculo matricial.
- Procedimientos de Análisis Matemático.
- Cálculo: derivación, integración, desarrollos en serie, estudio de límites,…
- Estudio analítico, numérico y gráfico de funciones de todo tipo.
- Trabajo con números complejos,...

Este tipo de programas son muy potentes desde el punto de vista matemático, pero a menudo es necesario manejar con mucha precisión el lenguaje que necesitan para ejecutar órdenes. Este aspecto hace que no sean del todo populares para las matemáticas escolares.

Sin embargo son frecuentes los proyectos y trabajos que se preocupan de diseñar actividades que tengan cabida en el aula de matemáticas de

Secundaria usando estas aplicaciones. Un ejemplo es la Asociación de Usuarios de Derive, desde cuya página: http://www.upv.es/derive/ se puede acceder a un gran número de propuestas de este tipo. Asimismo, desde esa página se habilitan descargas temporales gratuitas de demostraciones de Derive.

Aplicaciones de Geometría Dinámica

Si los programas de cálculo simbólico constituyen una herramienta muy potente para el cálculo y el análisis, no cabe duda que el desarrollo de aplicaciones de geometría dinámica suponen una nueva ventana al estudio de la geometría.

Algunos de estos programas son los siguientes: Cabri II Plus (http://www.cabri.com), The Geometer's Sktechpad (http://www.keypress.com/sketchpad), o Cinderella (http://cinderella.de/tiki-index.php). GeoGebra ha sido una nueva e interesante versión de este tipo de software, que aúna álgebra y geometría. En él centraremos el resto de este apartado.

A través de la página siguiente es posible descargarse gratuitamente este software libre: http://www.geogebra.org/

Desde esa misma página es posible acceder a información y modos de uso de GeoGebra. Nuestra recomendación es echar un vistazo a los comandos básicos y luego lanzarse a explorarlo directamente.

Esta primera exploración debe permitir llevar a cabo construcciones como las siguientes:

a) A partir de dos puntos, construir dos circunferencias tangentes con esos puntos como centros. Desplazar después los puntos ¿siguen siendo tangentes las circunferencias?

b) Dado un segmento, construir un cuadrado con lado ese segmento.

c) Dado un segmento, construir un cuadrado con diagonal ese segmento.

d) ¿La *recta de Euler* existe para cualquier tipo de triángulo?

e) ¿Es posible construir un triángulo en el que dos de sus bisectrices sean perpendiculares entre sí?

f) Construir una parábola a partir de su definición como lugar geométrico. ¿Es posible construir también la elipse con este método?

g) Explorar la construcción de un friso y un mosaico a partir de un polígono básico y los movimientos en el plano.

El único límite para GeoGebra lo constituye tu propia imaginación. En España ya existen los denominados Institutos GeoGebra, que tienen presencia internacional y que promueven la realización de encuentros, de cursos de formación y suministran un espacio para compartir y discutir propuestas y experiencias. En las siguientes páginas puedes consultar información sobre dos de ellos:

http://thales.cica.es/geogebra/ (Instituto GeoGebra de Andalucía)

http://geogebra.es/ (Instituto GeoGebra de Cantabria)

1.2 MATERIALES Y RECURSOS A TRAVÉS DE INTERNET

A través de Internet es posible acceder a un gran número de archivos (documentos, imágenes, sonidos, videos,…), así como a muchos tipos de software. Este software puede ser cierto programa que esté a la venta; puede tratarse de algún programa “shareware” (gratuito temporalmente); o bien algún otro totalmente gratis. La mayor parte de este software hay que instalarlo en un ordenador, pero también existen pequeños programas, llamados “Applets”, que se ejecutan directamente desde Internet.

Nuestro objetivo en este caso es analizar alguno estos materiales que están localizables en Internet y que tienen que ver con distintos contenidos matemáticos. Vamos a ver y analizar tres ejemplos.

El primero es sobre *poliedros*, usando un programa que se puede descargar gratuitamente desde Internet. Los otros dos son Applets que se ejecutan directamente en la red. Uno de ellos es un juego para dos personas (o una persona contra el ordenador) sobre *divisores*. El último es sobre *fracciones* y también está diseñado como un juego. Estos dos programas se ejecutan desde la página Illuminations (http://illuminations.nctm.org) del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), en EE.UU.

Aunque todos ellos aparecen en inglés, aquí incluimos las instrucciones de manejo y algunas actividades en español. Por otro lado, la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales ha editado una versión en español de muchos de estos programas (NCTM, 2003).

Las referencias Guillén (1991), Llinares y Sánchez (1988) y Sierra, González, García y González (1989) pueden ayudarte a profundizar en los ejemplos que vamos a analizar.

Estudio de Poliedros con Poly

Poly es un software para estudiar poliedros, que puede descargarse gratuitamente desde Internet. Entra en la dirección http://www.peda.com/download/ y descarga en tu ordenador el programa **Poly 1.1**. Después de abrirlo, haz clic en “File/Preferences”, y activa todas las opciones de “visualización” posibles.

Selecciona una categoría de poliedros en la ventana desplegable y observa los sólidos que aparecen. Puedes usar distintos modos de mostrar los poliedros: transparentes, opacos, mostrar sólo vértices,… Puedes cambiarlos de color, hacerlos girar, y también desplegarlos usando el botón de desplazamiento horizontal:

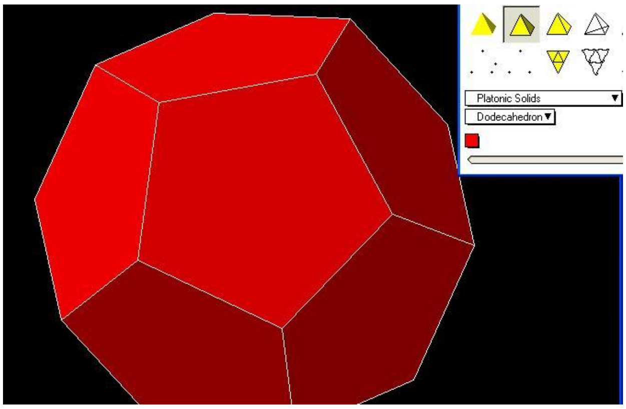


Figura 4.1: Pantalla de Poly

Como verás, Poly permite manipular los poliedros de una manera muy cómoda, si bien, esta manipulación es muy diferente de la que puede hacerse con un poliedro hecho de madera o con papel troquelado. Reflexionemos más sobre el trabajo con Poly:

a) ¿Cómo calcularías el número de aristas del dodecaedro? ¿Es necesario contarlas? ¿Qué problemas genera el contar las aristas cuando el poliedro está desplegado?

b) ¿Cuántos desarrollos planos del cubo puedes encontrar?

c) Trata de definir qué es una *dipirámide*, y un *antiprisma*, a partir de los que muestra Poly. ¿Permite el programa ver todos los poliedros que existen de ese tipo, o sólo algunos ejemplos?

d) Busca en la categoría de Primas Arquimedianos qué poliedro es aquél que se ha usado para hacer balones de fútbol. Tiene que ver con el icosaedro pero, ¿sabes cómo obtenerlo a partir de éste?

e) ¿Existe alguna actividad que pueda hacerse con un poliedro físico (que puedas “coger”), pero que no sea posible de realizarse con Poly?

f) Haz una valoración del programa Poly, comparándolo con el trabajo con poliedros construidos con papel troquelado, o con un juego de construcción.

El Juego de los Divisores

En http://illuminations.nctm.org/tools/tool_detail.aspx?id=12 hay un Applet interactivo que consiste en un juego para dos personas en el que puedes enfrentarte al ordenador o a un compañero.

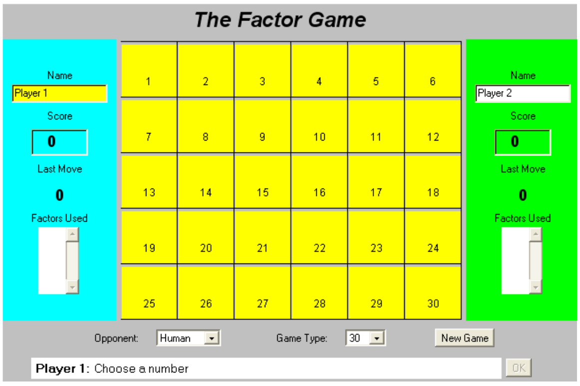


Figura 4.2: El juego de los divisores

Las instrucciones del juego son las siguientes:

- El **jugador A** elige un número en el tablero haciendo clic con el ratón sobre ese número para colorearlo.
- Usando otro color, el **jugador B** colorea los divisores propios del número seleccionado por A. Una vez que haya marcado todos los divisores, presiona **OK**.
- Después, los jugadores **cambian el turno**: ahora el jugador B elige un número, y el jugador A marca los divisores propios correspondientes, siempre y cuando no sean números que ya fueron marcados en rondas previas, y así sucesivamente.
- Si un jugador escoge un número que **no tiene divisores sin marcar**, el jugador pierde su turno pues no le da opción de juego a su contrincante. El jugador infractor no suma ningún punto. El juego acaba cuando no quedan números con divisores **sin colorear**.
- Cada jugador suma los puntos correspondientes a los números que colorea. El jugador que sume **más puntuación** al final de la partida es el vencedor del juego.

a) Juega algunas partidas contra el ordenador. Anota las ideas o estrategias que has seguido. ¿Es mejor empezar la partida o ser segundo? ¿Por qué?

b) ¿Cuál es la mejor selección para empezar la partida? ¿Y la peor? ¿Por qué? ¿Existe una estrategia que te permita ganar siempre?

c) Indica qué nociones matemáticas aparecen cuando se juega con este Applet.

d) Explica cómo podrían definirse los números primos en el contexto del juego de los divisores.

e) Haz un esbozo de una actividad para introducir los números perfectos mediante este juego.

La Carrera de Fracciones

Entra a la página web http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=18 y encontrarás un programa que sirve para practicar las relaciones entre fracciones y para estudiar cómo pueden combinarse fracciones entre sí.

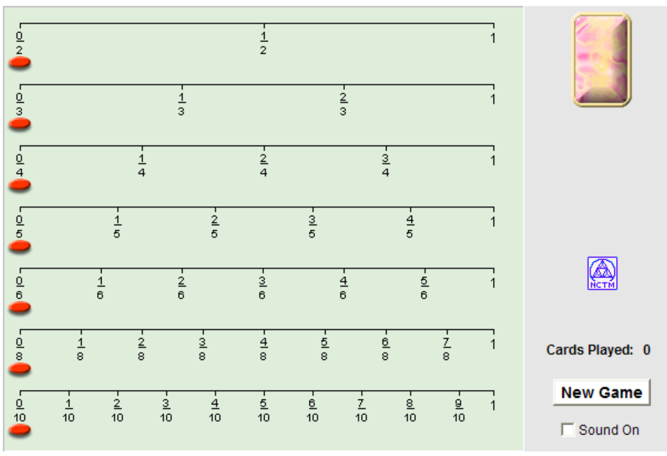


Figura 4.3: La carrera de fracciones

El objetivo del juego es llevar todas las marcas rojas que parten de la fila de la derecha (cero) a la fila de la izquierda (uno), usando para ello el menor número posible de cartas.

Haz clic en la pila de cartas para mostrar una fracción. Ahora debes mover los marcadores que desees de manera que el movimiento total que hagas sea una fracción menor o igual que la fracción que ha salido en la carta.

Por ejemplo, si ha salido la carta con **4/5**, puedes mover la marca de los quintos hasta **3/5** y la de los décimos y llevas la marca hasta **2/10**, porque **3/5 + 2/10 =3/5 + 1/5 = 4/5**. Estos movimientos aparecen a continuación:

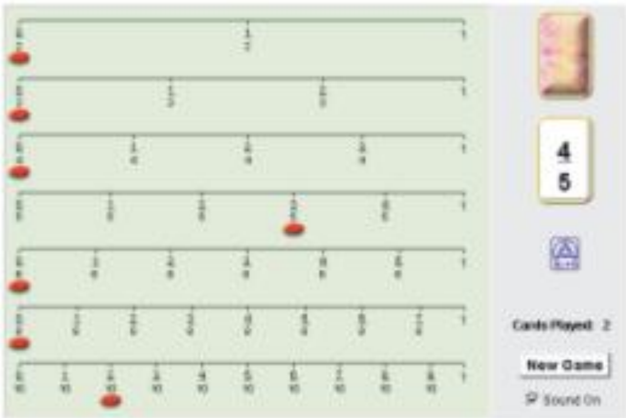


Figura 4.4: Movimiento para obtener la fracción 4/5

No obstante, cualquiera de estos otros movimientos son también posibles:

- Los quintos hasta 4/5.
- Los décimos hasta 8/10, por que 8/10 = 4/5.
- Los tercios hasta 2/3, por que 2/3 < 4/5.
- Los quintos hasta 1/5 y los décimos hasta 6/10, porque 1/5 + 6/10 = 1/5 + 3/5 = 4/5.
- Los medios hasta 1/2, los sextos hasta 1/6, y los octavos hasta 1/8, porque 1/2 + 1/6 + 1/8 = 12/24 + 4/24 + 3/24 = 19/24 < 4/5,…

Cuando has acabado de mover las marcas, haz de nuevo clic en la pila para obtener una nueva carta.

a) Juega una partida para practicar las reglas. ¿Es sencillo lograr el objetivo final?

b) Indica los conceptos y procedimientos sobre fracciones que se ponen en juego con esta actividad.

c) Señala en qué cursos podría usarse este programa, indicando tus razones.

d) ¿Cómo usarías este recurso con alumnos de ese nivel (tarea introductoria, para practicar, para profundizar, como tarea de evaluación,…)?

2. CALCULADORAS EN CLASE DE MATEMÁTICAS ¿SÍ Ó NO? ¿CÓMO?

En 1996, Penglase y Arnold realizaron una revisión de las investigaciones acerca de las calculadoras gráficas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Uno de los resultados de este trabajo es que en gran parte de esas investigaciones, se constata que el uso de las calculadoras redunda en ganancias para el conocimiento matemático de los estudiantes sobre funciones, las gráficas o para el desarrollo de visualización espacial.

Pero este uso también puede crear obstáculos en, por ejemplo, aquellos estudiantes que tienen dificultades para relacionar conceptualmente los aspectos algebraico y gráfico en cálculo.

Uno de los argumentos que se esgrime habitualmente en contra de calculadoras en la enseñanza de las Matemáticas es que se abandona y olvida lo que se hace con papel y lápiz, y eso va en perjuicio de la calidad en la formación.

Un uso de estos recursos sin la adecuada reflexión previa, puede introducir distorsiones en el proceso de enseñanza. Pero así como la escritura numérica no es un obstáculo para que el niño pueda realizar cálculos mentales, la calculadora tampoco tiene por qué jugar ese papel. La calculadora no tiene porqué entorpecer o frenar la actividad cognitiva del estudiante, pero siempre es indispensable la reflexión previa del profesor acerca del uso que puede hacer de ella.

Es cada vez mayor el número de proyectos educativos que incluyen la calculadora como una componente para alentar a profesores a incluirlas en su actividad docente. También crecen lo proyectos y programas específicos para la formación de docentes y estudiantes de matemáticas (Rojano y Moreno, 1999).

Varios documentos curriculares, como los del Ministerio de Educación y Ciencia (2007a y b) y los del NCTM (2003), expresan la necesidad de incorporar en el currículo de matemáticas un uso de las calculadoras que resulte adecuado para:

- el desarrollo de determinados procedimientos rutinarios,
- en la interpretación y análisis de conceptos matemáticos, y
- en la resolución práctica de situaciones relacionadas con la naturaleza, la tecnología, o con la vida cotidiana.

De este modo, se afirma que los estudiantes pueden investigar aspectos matemáticos como el estudio de las magnitudes, centrándose los estudiantes en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas.

Como puede observarse, el uso de calculadoras en el aula de matemáticas, trae consigo muchos argumentos a favor y en contra, y sobre algunos de ellos discutiremos. No podemos hacer un recorrido por todos los modelos posible de calculadoras, por lo que únicamente mostraremos varios ejemplos de actividades que se pueden plantear con algunos de ellos:

- Cálculo de los ceros de una función cuadrática con la *TI Voyage 200*.
- Problemas geométricos con la *Casio Classpad*.
- Un problema de optimización con la *TI-83 Plus*.
- Actividades de estadística con la *Casio Classpad*.
- Las matemáticas en movimiento con la *TI-84 Plus* y el sensor *CBR*.

Los documentos con los ejemplos se encuentran en el Anexo D.

Para saber más acerca de los productos y los programas de préstamo de "Texas Instruments", puede consultarse su portal educativo en la página: http://education.ti.com/educationportal/sites/ESPANA/homePage/index.html

Sobre calculadoras "CASIO" también puede encontrarse información en: http://edu.casio.com/

3. MEDIOS AUDIOVISUALES: LA FOTOGRAFÍA, EL CINE Y LA TELEVISIÓN

Hasta ahora hemos hablado de varios recursos tecnológicos que tienen un gran potencial en el aula de matemáticas. Pero existen otros soportes que, aunque son habituales en actividades cotidianas fuera de los centros educativos, también pueden constituir una fuente importante de actividades para el profesor de matemáticas de Primaria, Secundaria y Bachillerato. Nos referimos en este caso a la fotografía y al cine y la televisión.

La naturaleza abstracta de las nociones matemáticas es una de sus características esenciales, y al mismo tiempo involucra gran parte de las dificultades que surgen durante su aprendizaje. Pero esas nociones matemáticas a menudo se emplean para resolver problemas en contextos que van más allá de lo meramente matemático. Por eso es posible en ocasiones "ver" formas y propiedades geométricas, gráficas, procesos de crecimiento, fenómenos de azar, etc.

Mediante el uso de la fotografía, es posible entonces "capturar" algunas de esas nociones matemáticas.

Por otro lado, en el cine y la televisión son frecuentes las alusiones a la matemática como disciplina, a sus orígenes y fundamentos, a los problemas que enfrenta, o a la vida personal o profesional de célebres matemáticos o de otros anónimos.

En este apartado describiremos cómo puede organizarse una actividad fotográfica con nuestros escolares, mostraremos algunos resultados de ocasiones en las que se ha llevado a la práctica unas actividad de este tipo, y analizaremos algunas producciones de cine y televisión que tienen que ver con las matemáticas.

3.1 FOTOGRAFÍA: "CAPTURANDO" LA MATEMÁTICA

Cuando las cámaras digitales irrumpieron en la sociedad, sin duda la fotografía se revolucionó en todo el mundo. Ahora prácticamente en cualquier hogar, empresa, o centro educativo existe alguna, además de las que se pueden hacer con teléfonos móviles y otros dispositivos electrónicos. Entonces, ¿por qué no aprovechar este recurso tecnológico en el aula de matemáticas? ¿Cómo podría hacerse? ¿Qué resultados pueden obtenerse?

Mucho antes de que la novedad digital llegara a nuestras manos, ya se usaba la fotografía tradicional para llevar a cabo actividades matemáticas con escolares de cualquier nivel educativo. Y uno de los proyectos pioneros en España de estos trabajos son los concursos de fotografía organizados en el Colegio Sierra Nevada, de Granada (González, 1999).

La idea original del proyecto fue la de poner a los alumnos de los últimos cursos de la antigua EGB de ese centro frente a una situación problemática en la que se conjugaran las matemáticas, la fotografía y el entorno de los escolares. El primer certamen de la actividad se realizó en el curso académico 1985-86.

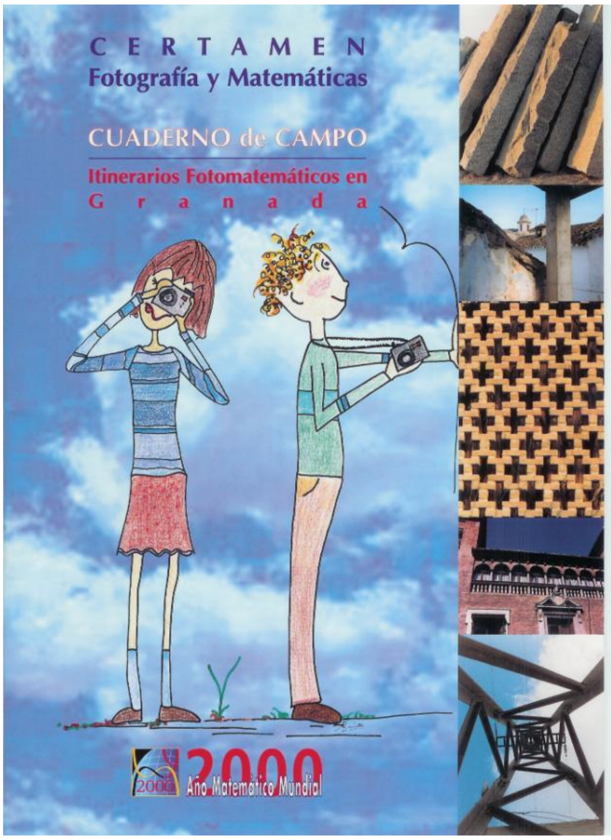
La finalidad de la actividad era que los escolares:

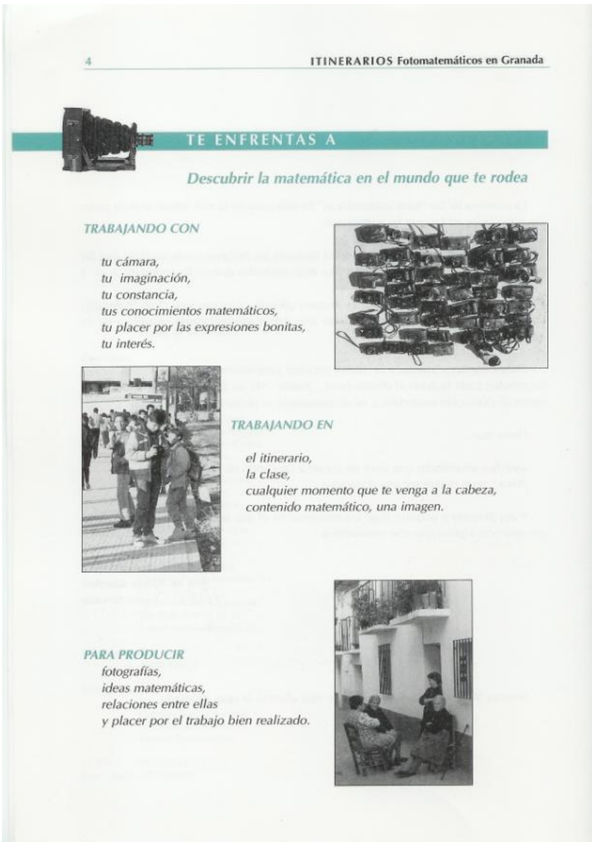
- Descubrieran situaciones ambientales en las que apreciasen un contenido matemático.
- Realizaran fotografías del lugar o situación elegida.
- Trabajasen posteriormente a partir de esas fotografías para:
    - Expresar un "lema", lo más creativo posible, que hiciese referencia la concepto matemático que motivó la fotografía.
    - Descubrir nuevos contenidos matemáticos en las fotografías.

- Inventar actividades y situaciones problema a partir de las imágenes.
- Resolver situaciones problemáticas planteadas por otros compañeros o por los profesores.

Para llevar a cabo la actividad, cada alumno tenía un cuaderno de campo donde hacer anotaciones y una cámara de fotos desechable. Durante una mañana o una tarde, los alumnos hacían un itinerario propuesto en compañía del profesor. Durante el itinerario, los alumnos tenían total libertad para hacer fotos de todos aquellos rincones en los que ellos "vieran" matemáticas. En ese momento anotaban un posible "lema" para las fotos que luego revisaban una vez que las imágenes estaban impresas.

Con motivo del Año Matemático Mundial en el 2000, y basándose en la experiencia previa del Colegio Sierra Nevada, se celebró el Certamen Fotografía y Matemáticas, en el que participaron muchos centros escolares de toda Granada y su provincia. Se editaron unos cuadernos de campo con diferentes itinerarios en distintas poblaciones (González y Rico, 2000). Las siguientes figuras muestran algunas páginas del cuaderno de campo realizado para el área metropolitana de Granada:




4 ITINERARIOS Fotomatemáticos en Granada

TE ENFRENTAS A

Descubrir la matemática en el mundo que te rodea

TRABAJANDO CON

tu cámara,
tu imaginación,
tu constancia,
tus conocimientos matemáticos,
tu placer por las expresiones bonitas,
tu interés.

TRABAJANDO EN

el itinerario,
la clase,
cualquier momento que te venga a la cabeza,
contenido matemático, una imagen.

PARA PRODUCIR
fotografías,
ideas matemáticas,
relaciones entre ellas
y placer por el trabajo bien realizado.

CERTAMEN Fotografía y Matemáticas 21

ACTIVIDADES DURANTE EL ITINERARIO

1ª.- *Trabajamos* ***todos los contenidos matemáticos.***
Buscamos cuáles de ellos se encuentran en el itinerario.

2ª.- *Trabajamos* ***un motivo ambiental****, monumento, espacio, paisaje, edificio, fachada.*
Buscamos en él todos los conceptos y contenidos matemáticos que conocemos.

3ª.- *Elegimos* ***un concepto matemático concreto.***
Buscamos todas las relaciones que existen con otros contenidos matemáticos.

PRIMERA propuesta de actividad

– *En el recorrido general del itinerario, trabajamos todos los contenidos matemáticos.*

VISIÓN GENERAL DEL RECORRIDO

A lo largo del recorrido vas a encontrar muchos motivos, detalles, paisajes, edificios, que te van a llamar la atención por su belleza, formas y contenidos.

Busca en ellos LAS MATEMÁTICAS que tú conoces

Mira a todas partes y en todas direcciones, cualquier detalle que tengas delante, detrás, arriba o abajo, puede encerrar el contenido matemático que estás buscando.

CERTAMEN Fotografía y Matemáticas 23

ACTIVIDADES DURANTE EL ITINERARIO

SEGUNDA propuesta de actividad

– *Elegimos un MOTIVO AMBIENTAL concreto: monumento, espacio, paisaje, edificio, fachada…*

Buscamos en él todos los conceptos y contenidos matemáticos que conocemos.

VISIÓN MATEMÁTICA DE UN MOTIVO

Elige un motivo, monumento, espacio, paisaje de este itinerario y haz un reportaje más detallado de las ideas matemáticas que encuentras en él.

TERCERA propuesta de actividad

– *Elegimos un CONCEPTO MATEMÁTICO concreto.*

Buscamos IMÁGENES en el itinerario que sean representativas del concepto matemático elegido. También podemos trabajar las relaciones que existen con otros contenidos matemáticos.

UN CONCEPTO MATEMÁTICO EN EL ITINERARIO

Para la realización de esta propuesta es conveniente que lleves decidido el concepto matemático con el que vas a trabajar.

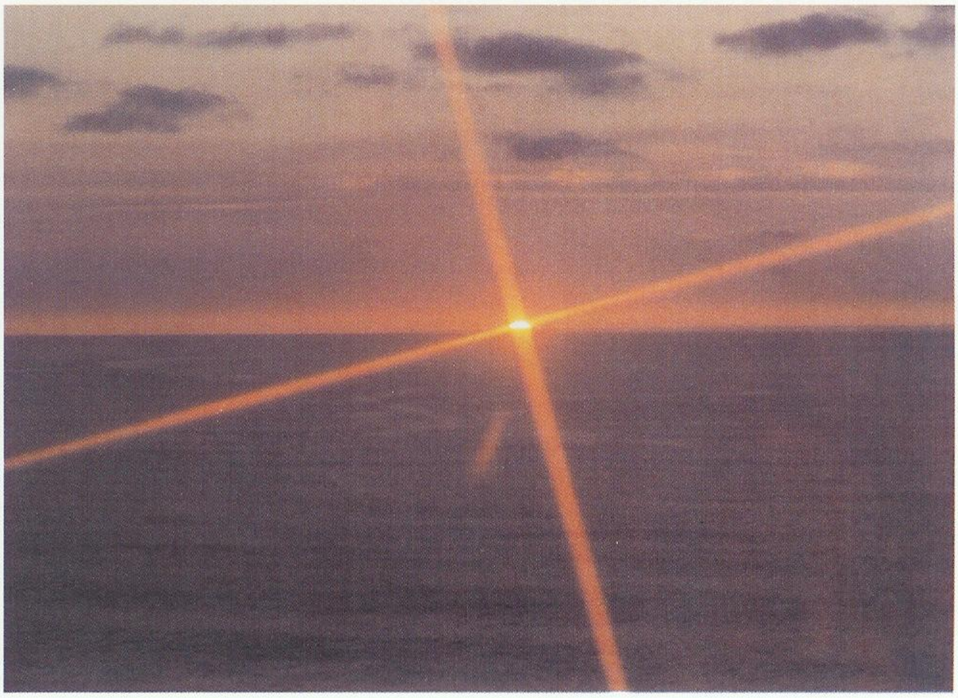
Ya conoces las tres propuestas de trabajo que puedes realizar.

Te recomendamos que trabajes las tres a la vez.

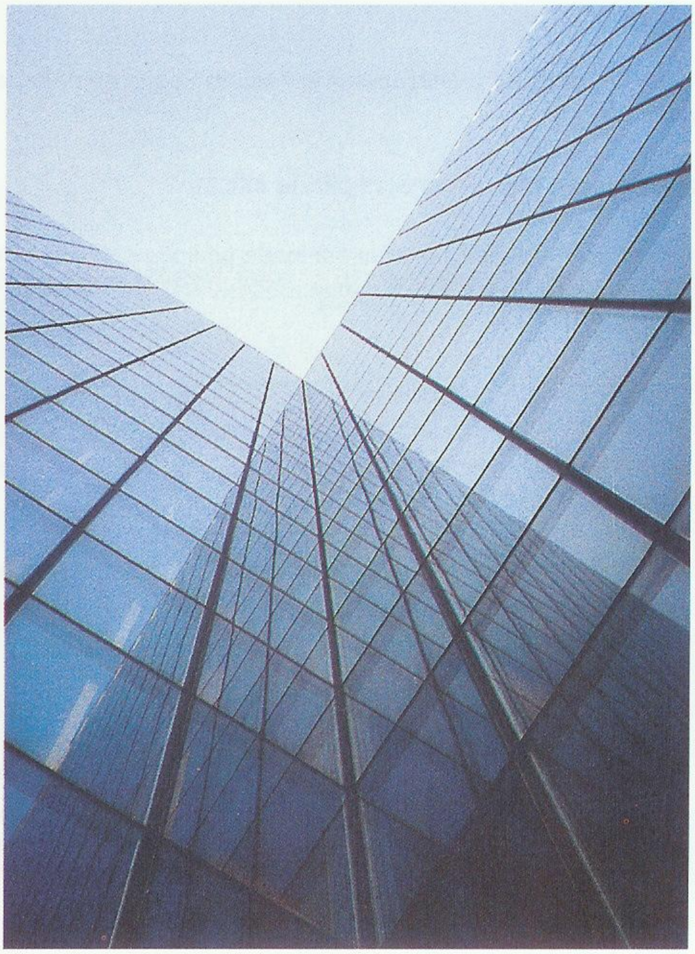
Figura 4.5: Cuaderno de campo del Itinerario Fotomatemático en Granada (González y Rico, 2000)

En otros centros españoles se han realizado actividades similares. Un caso en el que se han llevado a cabo de manera regular es el I.E.S. Andalán, de Zaragoza. Algunos de los resultados obtenidos son los siguientes (Alonso et al, 2001):

"Paralelismo e intersección"
Autor: Borja Florit
2.º de Bachillerato – IES Andalán (Zaragoza)
Primer premio del I Concurso (1994-1995)



"El sol reparte ángulos"
Autor: Fernando García Arbej
3.º de ESO – IES Andalán (Zaragoza)
Tercer premio del III Concurso (1996-1997)



"*Ejes cartesianos*"
Autor: Pablo Elipe Sanz
1.º de Bachillerato – IES Andalán (Zaragoza)
Primer premio del VI Concurso (1999-2000)

Figura 4.6: Fotografía y matemáticas

Sin duda es sorprendente la capacidad de los niños para "capturar" las matemáticas con una cámara de fotos. Es muy interesante explorar cómo ellos ven e interpretan las matemáticas que conocen en el aula, y sin duda la fotografía es un recurso muy valioso en esa exploración.

3.2 UN GUIÑO AL SÉPTIMO ARTE

El policía Ángel Barciela, al que le faltan algunas materias para acabar exactas, explica a Julia Buendía qué es una banda de Möebius mientras toman una copa en un salón de baile. Este es el diálogo:

Ángel: *Coges así los extremos de la cinta y giras uno de ellos de manera que hagas coincidir A con C y B con D. El resultado es un lazo que aparentemente tiene dos superficies. Pero si pasas el dedo por un solo lado de la cinta, al dar una vuelta entera, te encuentras en el otro lado, ¿comprendes? Luego ese lado sólo tiene una superficie, y a eso se le llama la banda de Moebius.*

(Risas de ambos, por la sensación de estar dando y recibiendo una clase de matemáticas en lugar de charlando).

Julia: *Nunca se me dieron bien las matemáticas. Yo estudié Filología Inglesa e Historia en la Universidad de Berlín. Y me parece absurdo algo que pueda demostrar que un lazo, que obviamente tiene dos caras, sólo tiene una.*

Ángel: *Eso no es una demostración. Por hoy quédate con una idea que no es matemáticas, sino científica: De una proposición científica, sólo puede demostrarse que es falsa, nunca que es verdadera.*

Julia: (sonriendo) *¡Qué raro eres, Barciela!*

Ángel: (sonriendo también) *¿Yo? ¿Por qué?*

Julia: *No sé. No tienes pinta de que te gusten las matemáticas, ni la ciencia. Claro que tampoco tienes pinta de policía. ¿Y te gusta tu trabajo?* (Él niega con la cabeza mientras bebe de la copa de coñac) *¿Y porqué lo haces?*

Ángel: *Es un oficio como otro cualquiera y yo lo sé hacer bien. Además es uno de esos trabajos que hacemos mejor los que no nos gusta, que los que les gusta demasiado, ¿no te parece? Antes pensaba que se podía arreglar un poco el mundo.*

Julia: *¿Y ahora no?*

Ángel: *Ahora pienso que con que cada uno mantenga un poco limpio lo que tiene a su alrededor, es más que suficiente.*

Este diálogo, extraído de la película "Tu nombre envenena mis sueños" de Pilar Miró (1996), es destacado por Alfonso Población en su página Web http://www.divulgamat.net/weborriak/Cultura/CineMate/MHC/YQueHayDelCine2.asp como un buen ejemplo de acercamiento coloquial a los teoremas de indecibilidad de Gödel: Existen enunciados que, aún siendo verdaderos, no pueden ni probarse ni refutarse a partir de unos determinados axiomas.

Escenas como ésta, en las que hay alusiones, comentarios o reflexiones sobre las matemáticas, son numerosas en el cine. Y con muchas interpretaciones.

Existen proyectos comerciales como "El indomable Hill Hunting" (Gus Van Sat, 1999) o "Una mente maravillosa" (Ron Howard, 2001) en las que se sensibiliza al espectador con componentes humanas y románticas (a menudo inventadas).

Figura 4.7: "Una mente maravillosa" y "El indomable Will Hunting"

Pero existen otros títulos menos lacrimógenos. Dos ejemplos ya inevitables son “Pi, el Orden del Caos” (Arafnosky, 1998) y “Cube” (Natali, 1997). Laprimera está basada en un popular cómic: Pi: The Book of Ants (Pi: el Libro de las Hormigas). Max Cohen, un matemático brillante vive atormentado con el comportamiento casi caótico de las cifras decimales del famoso número Pi; pero su vida personal es más caótica aún. Una película cruenta y desconcertante rodada en blanco y negro que no deja al espectador indiferente. En ella aparecen muchas alusiones a propiedades numéricas y existe cierto posicionamiento con respecto al origen y el sentido de las matemáticas.

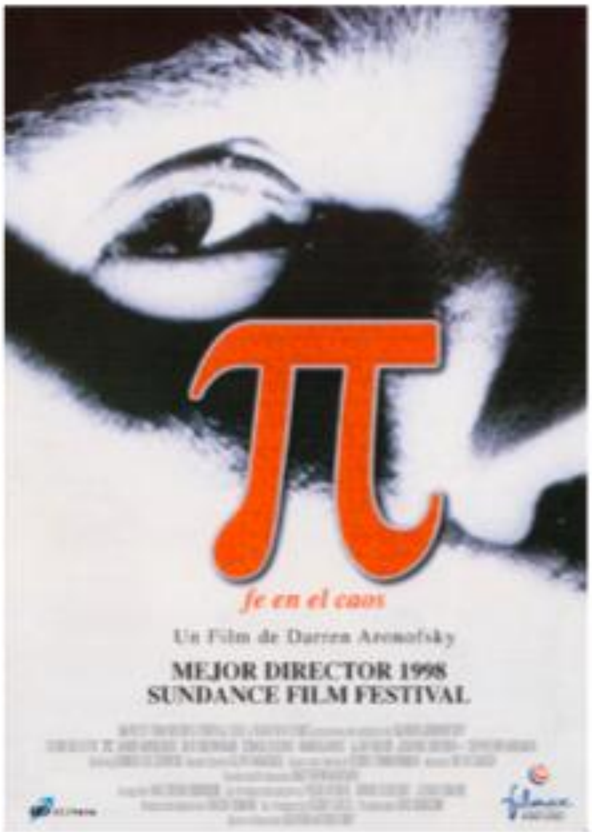


Figura 4.8: “Pi: Fe en el caos”

En “Cube”, un heterogéneo grupo de personas despiertan en una especie de celda cúbica de la que pueden salir para llegar sólo a otra exactamente igual. Lo malo es que en algunas de esas celdas hay trampas letales. Una joven matemática descubre relaciones entre los dígitos que identifican cada celda y la existencia o no de trampas en las celdas contiguas. Desde ahí comienza una dura lucha por salir de la prisión.

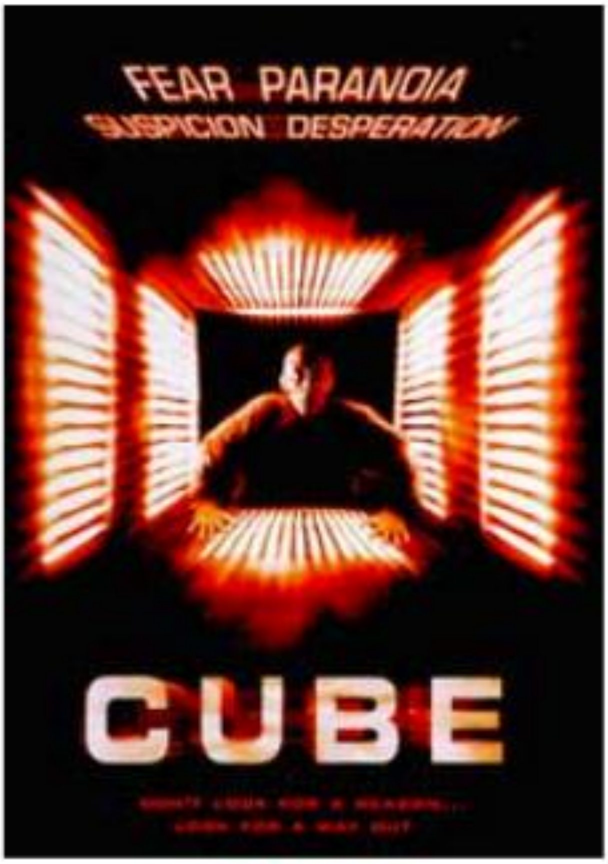


Figura 4.9: “Cube”

Si una persona sufre de claustrofobia, es mejor que no vea la película, pero si tampoco tolera la sangre, mejor que la olvide… A pesar de lo sangriento y duro de algunas escenas, ciertamente se ponen en juego muchas nociones matemáticas. En la siguiente página aparece una secuencia de actividades para realizar después de ver la película:

http://www.sinewton.org/cms/images/Varios/cube.pdf

En otras ocasiones, la matemática, o la vida de un matemático, es sólo un hilo argumental secundario de la historia, y entonces aparecen muchos más títulos ¿Conocéis alguno? Pensemos en otros títulos más recientes, como “Los crímenes de Oxford” (de la Iglesia, 2008) o “La habitación de Fermat” (Piedrahita, 2007). ¿Es posible diseñar alguna actividad a partir de alguna de ellas para el aula de matemáticas?

Si lo que queremos es reír un rato mientras aprendemos matemáticas, lo mejor es ver "Donald en el país de las matemáticas" (Disney, 1959). Un precioso cortometraje que nos introduce en algunos de los problemas clásicos de la matemática, y en algunas de sus utilidades. Merece especial atención la reflexión sobre la razón áurea, y la explicación de cómo ganar el billar a tres bandas es irrepetible. Es sin lugar a dudas un estupendo recurso para ofrecer a nuestros alumnos una visión bien animada y divertida de las matemáticas.

Figura 4.10: Fotograma de "Donald en el país de las matemáticas"

La Televisión

Como afirma Antonio Pérez (http://platea.pntic.mec.es/aperez4/), no es arriesgado afirmar que, en los países de nuestro entorno, los escolares pasan al menos tanto tiempo ante el televisor como en el aula. Por tanto, ¿por qué no usar recursos audiovisuales en clase de matemáticas?

Para este autor, un vídeo didáctico puede usarse para:

- Aproximar la realidad al aula, reproduciendo aspectos concretos de la misma.
- Motivar al alumno ante determinadas situaciones o investigaciones.

- Promover debates e investigaciones sugeridas por el video o complementarias a él.
- Adquirir destrezas y habilidades.
- Descubrir y aplicar procedimientos.
- Fomentar actitudes y transmitir valores.

Un ejemplo de vídeos didácticos sobre matemáticas los encontramos en las dos producciones de Televisión Española “Más por Menos” y “Universo Matemático”. En ellos, se abordan problemas, curiosidades e historia de las matemáticas aprovechando los recursos que brinda la televisión.

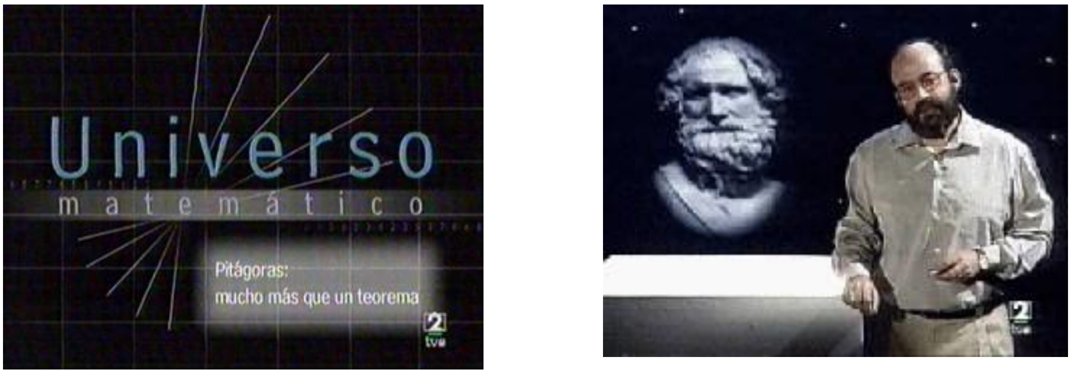


Figura 4.11: Secuencias de “Universo matemático” de RTVE

Además de estos programas, existen otras muchas colecciones de documentales y videos educativos sobre matemáticas. Pero desde hace un tiempo, en una cadena de televisión de nuestro país se está emitiendo una serie estadounidense en la que uno de sus protagonistas usa su conocimiento de las matemáticas para resolver complicados dilemas policiales. Se trata de la serie “Numb3rs”. En ella, un joven y sagaz matemático colabora con su hermano policía resolviendo casos en los que teorías matemáticas resultan claves.

En Estados Unidos esta producción ha sido todo un éxito, debido en parte a que se basa en hechos reales. Este auge se ha usado también con fines didácticos, y es que la compañía Texas Instruments, la cadena CBS y el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), han elaborado un proyecto en el que se plantean problemas matemáticos basados en las matemáticas que se mencionan en la serie. La página de acceso es:

http://www.cbs.com/primetime/numb3rs/ti/activities.shtml

¿Quién dice que no hay matemáticas en cualquier lugar?

4. A MODO DE SÍNTESIS…

- Las nuevas tecnologías como calculadoras y ordenadores tienen perfecta cabida en la educación, si bien es necesario analizar con detalle cómo implementarlas.
- El éxito de la tecnología depende de la planificación que lleve a cabo el profesor.
- El uso de esa tecnología siempre tiene ventajas e inconvenientes, fortalezas y debilidades.
- En Internet existe multitud de materiales diseñados para su uso en la enseñanza de las matemáticas…
- Pero también muchas páginas contienen información desestructurada, errónea o mal desarrollada.
- Una búsqueda bien planificada contribuye a localizar enlaces de interés para la enseñanza de las matemáticas.
- Los medios audiovisuales también constituyen un soporte interesante para la enseñanza de las matemáticas, pero igualmente es fundamental organizar su uso en el aula.

5. ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

En la sección 1.2 hemos presentado varios recursos interactivos disponibles en Internet, y en cada uno proponemos algunas cuestiones. Localiza tú algún otro recurso, descríbelo y diseña una tarea dirigida a escolares que incluya al menos 5 actividades. Indica los objetivos, los contenidos que comprende, la descripción de las actividades, y cómo se llevaría a cabo usando el recurso seleccionado.

TEMA 5.

PLANIFICACIÓN DE TAREAS EMPLEANDO MATERIALES Y RECURSOS

1 ELEMENTOS DE LA PLANIFICACIÓN EN MATEMÁTICAS

1.1 LOS MARCOS DE REFERENCIA

El proceso de planificación que el profesorado sigue para preparar su trabajo diario depende de su manera de concebir el trabajo como profesional, su experiencia, sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje, el conocimiento del alumnado y del tema que se trabajará con los alumnos y otras variables que no viene al caso enumerar.

El foco de este proceso de planificación se centra en lo que habitualmente se denomina “preparar las clases”.

El instrumento básico que recoge todas las decisiones y materiales que el profesor produce al planificar a este nivel se corresponde con lo que llamamos la Unidad Didáctica (UD).

Cesar Coll (1987, p.137) incluye las Unidades Didácticas en el tercer nivel de concreción del currículo “Es una unidad de trabajo relativa a un proceso completo de enseñanza/aprendizaje que no tiene una duración temporal fija. En la medida en que concierne a la planificación de un proceso completo de enseñanza/aprendizaje las unidades didácticas precisan unos objetivos, unos bloques elementales de contenido, unas actividades de aprendizaje y unas actividades de evaluación”. La secuencia ordenada de las UD de un curso o nivel constituye una programación de curso o nivel.

No se puede olvidar que hay ya instrumentos de planificación general que actúan de marco obligado a la hora de elaborar una UD. El documento básico español es la referencia legislativa publicada en los boletines oficiales de las Comunidades autónomas y que constituyen el currículo oficial. Suele ser un Decreto de enseñanzas y otra norma sobre secuenciación de contenidos por cursos o ciclos. A su vez, los decretos de las comunidades autónomas están cohesionados por un Real Decreto de Enseñanzas mínimas que publica el

Ministerio de Educación y Ciencia con el currículo obligatorio en todas las regiones autónomas.

La publicación del RD 1631/2006 de 29/12/2006 BOE de (5/01/2007) por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), enfatiza la necesidad de incorporar a la organización del currículo las competencias básicas del aprendizaje matemático como elemento “integrador y orientado a la aplicación de los saberes adquiridos”. Esta incorporación es nueva en un decreto de enseñanzas y llama la atención su similitud con otras formulaciones de competencias en matemáticas como tendremos ocasión de comprobar.

También los documentos que constituyen el Proyecto del Centro y el Proyecto Curricular del Área aportan algunas precisiones y criterios a la planificación.

Finalmente, como quiera que estos documentos no aportan detalles y decisiones concretas suficientes para elaborar las UD y la secuencia de actuaciones que protagonizan profesor y alumnado en la clase de cada día, las empresas editoriales publican los libros del alumno y del profesor que se constituyen, en España, en una respuesta estándar. Así, los autores de materiales curriculares proponen, en forma de lecciones, algunos elementos de las unidades didácticas. Con estos productos intentan ayudar al profesorado a salvar este gran escalón existente entre los documentos generales de planificación y la gestión concreta en un aula.

En Secundaria (ESO) es frecuente oír al profesorado decir que “el libro debe completarse en algunos aspectos”, “el libro no lo sigo más que para dictarles los problemas de casa” “estos temas me los salto” “de cada lección no uso más que las páginas centrales, las primeras y las últimas son perder el tiempo” etc. Ello implica reconocer que no es equivalente una UD a una lección de un libro de texto. Hay muchas decisiones personales, nuevos recursos, explicaciones más profundas, tareas escolares específicas que se extraen de otras fuentes y constituyen finalmente un producto personal, propio del profesor que dirige el proceso de enseñanza. Este es el sentido que refuerza la idea de elaborar la Unidad Didáctica. No se trata meramente de satisfacer la voracidad institucional de papeleo. Se pretende reivindicar el documento que recoge la

reflexión personal y plasma el guión previsible de las clases con los propios alumnos.
Si se quiere ampliar información acerca de la utilización de organizadores curriculares que facilitan el análisis de la información pertinente para elaborar una planificación curricular en el área de matemáticas se puede consultar (Rico, L. 1997)

1.2. CENTRÁNDOSE EN UN MARCO CURRICULAR PARA LA EVALUACIÓN: EL MARCO

Es conocido el impacto que las evaluaciones PISA sobre las matemáticas y otras materias están teniendo en diferentes países.
Obviemos el tema recurrente del puesto que ocupa España en este marco de análisis alrededor de la OCDE con una muestra de un cuarto de millón de alumnos y analicemos otros productos que están ayudando al diseño de las pruebas de evaluación.
Nos referimos al marco de decisiones relacionadas con el currículo de matemáticas que han adoptado. Ha existido un gran esfuerzo por

1. definir grandes competencias en el marco de la Secundaria,
2. estructurar los contenidos matemáticos desde una perspectiva más fenomenológica y aplicada, y
3. sobre todo, dar instrumentos para analizar las tareas escolares bastante desarrollados y transportables a contextos de enseñanza.

Para profundizar en estos informes puedes consultar la bibliografía en español en la página web www.pisa.oecd.org.

En lo que sigue, haremos un resumen adaptado a nuestro objetivo de algunas páginas del libro "Marcos teóricos de PISA 2003 Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas"

Esta traducción está accesible en .pdf y puede descargarse gratuitamente de la página citada

a) Significado de competencia matemática:

Básicamente estaríamos de acuerdo con que en la Secundaria Obligatoria las matemáticas pretenden desarrollar la competencia matemática entendida así:

La competencia matemática es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. (p. 28)

En relación con el Bachillerato deberíamos añadir el carácter preparatorio para la Universidad.

b) Elementos que se involucran para analizar y diseñar las tareas escolares

El instrumento de análisis de una tarea escolar y su proceso de resolución lo constituyen tres elementos: el *contexto* en el que se sitúa el problema; las *ideas matemáticas* "*que reflejan el modo en que observamos el mundo a través de un cristal matemático*" y las *competencias* que se ponen en juego cuando se resuelve el problema. También intervienen el *formato* en el que se presenta la tarea pero con menor relevancia.

Los elementos del área de conocimiento de matemáticas (p. 33)

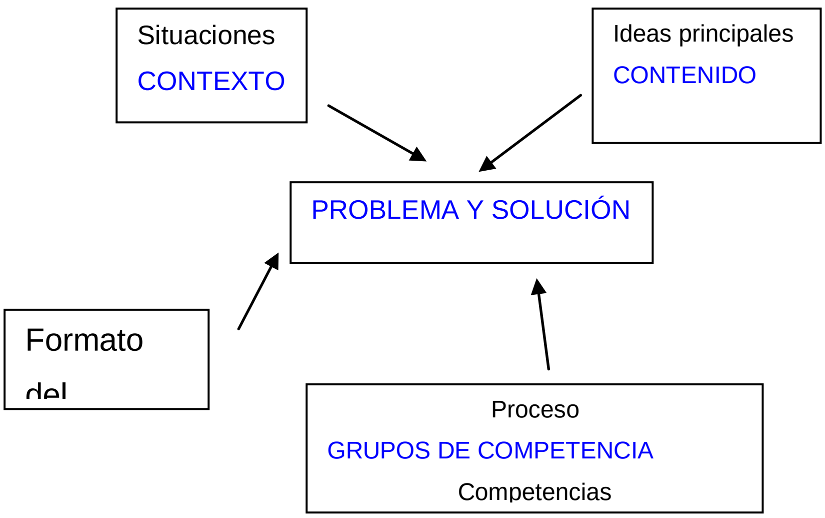


Imagen 1

c) Situaciones o contextos

El hecho de considerar las situaciones como un elemento clave para el análisis y evaluación de las tareas procede de varios argumentos.

De una parte, reconocer "que al resolver un individuo asuntos susceptibles de tratamiento matemático, las representaciones y los métodos que escoge a menudo dependen de las situaciones en las que se presentan los problemas" p.35.

De otra parte los contextos de problemas de ámbito extra-matemático suelen influir en la propia solución y en su interpretación. (Pueden analizarse los comentarios que se hacen al problema de la Farola en el texto citado p. 30 para ampliar esta idea).

La experiencia nos ha enseñado muchas veces que un alumno es capaz de resolver problemas muy semejantes en planteamiento si se presentan en un contexto y no lo son al cambiarlo. Se manejan estrategias diferentes. En este sentido se justifica, por ejemplo, la utilidad de algunos materiales y recursos ya que simulan contextos que pueden favorecer la resolución de problemas. Otras veces, es común enfrentarse a soluciones negativas referidas a medidas o edades de personas, etc. en las que el contexto no se considera.

El marco PISA distingue entre situaciones y contextos. Por ejemplo el problema que sigue se clasifica como un contexto de "finanzas y negocios" dentro del grupo de "situaciones públicas" El contexto especifica que se refiere al dinero y tipos de intereses propios de una cuenta bancaria"

"CUENTA DE AHORRO

Se ingresan 1.000 zeds en una cuenta de ahorro en un banco. Existen dos opciones: o bien obtener un interés anual del 4%, o bien obtener una prima inmediata de 10 zeds y un interés anual del 3%. ¿Qué opción es mejor al cabo de un año? ¿Y al cabo de dos años"?

El marco PISA propone tareas en cuatro tipos de situaciones

Personales: Están relacionadas con la vida diaria de los estudiantes. Se refieren al modo en que un problema matemático se presenta directamente al alumno. Están muy vinculados a actividades que los alumnos perciben o realizan como individuos.

Educativas o laborales: Las encuentra el alumno en un centro escolar o en un entrono de trabajo.

Públicas: Se refieren a la comunidad local u otra más amplia en la que el individuo se involucra y sus actuaciones tienen repercusiones en la vida pública

Situaciones científicas. Son las más abstractas. Pueden implicar comprender un proceso tecnológico u de otra ciencia. Si el problema se refiere solo a objetos matemáticos el contexto de la tarea se considera intra-matemático dentro de una situación científica

d) Contenidos matemáticos (p. 36-39)

El marco PISA establece una clasificación del contenido desde una perspectiva fenomenológica muy indicada para evaluaciones en las que predomina la observación de problemas en contextos extra-matemáticos.

Las cuatro ideas principales que agrupan los tipos de problemas son:

Cantidad

Espacio y forma

Cambio y relaciones

Incertidumbre

Si trabajamos con tareas referidas a materiales y recursos que se han clasificado atendiendo a los tópicos habituales: Números, Álgebra, Geometría, etc. no parece muy importante adoptar otra clasificación que utiliza como criterio el fenómeno principal que se manifiesta en el problema, frente a la organización lógica de la herramienta matemática que pueda utilizarse.

e) El proceso de matematización (p. 39-41)

El estudio a que nos estamos refiriendo contiene una concepción de cómo se aprende para resolver problemas y, en definitiva, cómo se "hacen matemáticas". En el documento PISA 2003 Pruebas de matemáticas y de Solución de Problemas que puede encontrarse en la dirección web http://descartes.cnice.mec.es/heda/ASIPISA/ASIPISA_LCR/bibliografia/pisa2003liberados.pdf, Luis Rico resume brevemente el significado del proceso de matematización en este marco:

"El proceso de hacer matemáticas, que conocemos como matematización, implica en primer lugar traducir los problemas desde el mundo real al matemático. Este primer proceso se conoce como matematización horizontal.

La matematización horizontal se sustenta sobre actividades como las siguientes:

- *Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema.*
- *Representar el problema de modo diferente.*
- *Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.*
- *Encontrar regularidades, relaciones y patrones.*
- *Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos.*
- *Traducir el problema a un modelo matemático.*
- *Utilizar herramientas y recursos adecuados.*

Una vez traducido el problema a una expresión matemática, el proceso puede continuar. El estudiante puede plantear a continuación cuestiones en las que utiliza conceptos y destrezas matemáticas. Esta parte del proceso se denomina matematización vertical.

La matematización vertical incluye:

- *Utilizar diferentes representaciones.*
- *Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.*
- *Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos.*
- *Argumentar.*
- *Generalizar.”*

Las tareas que se proponen utilizando materiales y recursos también implican resolver problemas en los que estas capacidades descritas intervienen de modo habitual. Por ello, el modelo de competencias matemáticas que el Proyecto PISA extrae de la capacidad de matematizar es muy ajustable a nuestros propósitos

f) Competencias y Grupos de Competencias (p. 41-52)

En este Proyecto se evalúa la competencia matemática a través de 8 competencias, aunque la número 8 de este texto no se muestra ya como evaluada en otros documentos posteriores, tal vez porque el tipo de pruebas de la evaluación no favorece el análisis de esta competencia.

La descripción detallada se puede encontrar en las páginas citadas del documento Marcos Teóricos de PISA 2003

Pensar y Razonar

Argumentar

Comunicar

Modelar

Plantear y resolver problemas

Representar

Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones

Empleo de soportes y herramientas

Estas competencias no se evalúan en el Proyecto por separado ni el alumno las utiliza independientemente. Al resolver una tarea escolar el resolutor las pone en juego de e interrelacionando acciones de varias competencias a la vez. Tampoco se aprenden de forma independiente ni al mismo ritmo. Sin embargo al profesor le pueden resultan útiles para analizar la actividad del alumno como indicadores y detectar en que aspectos se debe incidir más o menos.

Cualquier actividad del alumno tiene una demanda cognitiva de habilidades o destrezas que ponen en juego. Emplea un concepto, justifica un resultado, interpreta gráficas, construye el modelo matemático para el problema, etc. Estas habilidades se prevén cuando un profesor propone un problema y éste detecta si las aplica con corrección o no. Así evaluamos el desarrollo de la competencia en los alumnos. Conforme más detallemos las competencias más compleja se hace la evaluación y la tarea pasa de ser el trabajo de un profesor al de un investigador. Un punto de equilibrio se impone para que el tiempo necesario en la evaluación no tienda a infinito

En este sentido parece una aportación interesante que el Proyecto PISA incorpore a cada tarea escolar no la descripción estricta de las competencias que se involucran sino un indicador de la complejidad en el desarrollo de ellas.

Se establecen tres niveles o grupos de competencias: El primer nivel se denomina Reproducción, el segundo Conexión y el tercero Reflexión.

Luis Rico en el texto que ya hemos citado resume así los tres niveles:

“Reproducción

En el nivel de reproducción se engloban aquellos ejercicios que son relativamente familiares y que exigen básicamente la reiteración de los conocimientos practicados, *como son las representaciones de hechos y problemas comunes, recuerdo de objetos y propiedades matemáticas familiares, reconocimiento de equivalencias, utilización de procesos rutinarios, aplicación de algoritmos, manejo de expresiones con símbolos y fórmulas familiares, o la realización de operaciones sencillas.*

Conexión

El nivel de conexiones permite resolver problemas que no son simplemente rutinarios, pero que están situados en contextos familiares o cercanos. Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien enlazar diferentes aspectos con el fin de alcanzar una solución.

Reflexión

Este nivel de complejidad moviliza competencias que requieren cierta comprensión y reflexión por parte del alumno, creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos de distintas procedencias. Las tareas de este nivel requieren competencias más complejas, implican un mayor número de elementos, exigen generalización y explicación o justificación de los resultados."

En el documento Marco teórico se encuentran muy detallados los niveles de competencia asociados a cada nivel. He aquí un pequeño esquema resumen. (Imagen 2)

Se aplicamos esta clasificación a las tareas escolares con materiales y recursos estamos en disposición de ir graduando a priori la complejidad de los ejercicios propuestos.

Conviene insistir en que una clasificación previa ayuda pero la experiencia puede darnos información no prevista. Por ejemplo, en las pruebas PISA se ha observado como algún ítem que se ha clasificado de "reproducción" ha demostrado tener un grado de dificultad muy alto. (Ver en el documento PISA 2003 Pruebas de matemáticas y de Solución de Problemas la clasificación del Item 1 "Caminar 1" El grado de dificultad es un índice estadístico. La clasificación por grupos de competencias es una apreciación a priori como la que haremos al prever la complejidad de tareas con un material didáctico.)

Representación sintética de los grupos de competencias

Competencia matemática		
Grupo de reproducción	Grupo de conexión	Grupo de reflexión
Representaciones y definiciones estándar	Construcción de modelos	Formulación y solución de problemas complejos
Cálculos rutinarios	Traducción, interpretación y solución de problemas estándar	Reflexión y comprensión en profundidad
Procedimientos rutinarios	Métodos múltiples bien definidos	Aproximación matemática original
Solución de problemas de rutina		Múltiples métodos complejos. Generalización

Imagen 2

Actividad 1 Lee la descripción de competencias que ofrece el marco PISA y las competencias matemáticas del Real Decreto de enseñanzas mínimas de la ESO publicado en el BOE de 5/01/2007.

1. Analiza las semejanzas y diferencias que se encuentran entre ambas descripciones de competencias.
2. ¿Es posible que la planificación que hace el profesor del trabajo de aula se modificará de alguna forma al introducir estos nuevos referentes de aprendizaje? ¿Hasta dónde es posible tenerlos en cuenta? ¿Qué dificultades pueden surgir al incorporar este modelo de expectativas que se esperan alcance el alumno al trabajo cotidiano del profesor?

2. SELECCIÓN, SECUENCIACIÓN Y DISEÑO DE TAREAS ESCOLARES CON MATERIALES Y RECURSOS

2.1 ANÁLISIS DE MATERIALES Y RECURSOS EN EL MARCO DE LA U.D.

Los materiales y recursos en matemáticas se eligen y ponen en juego para ayudar a aprender. Por ello no se pueden analizar obviando el marco fundamental en el que se toman las decisiones básicas relacionadas con ¿qué? ¿cómo? y ¿con qué? enseñar.

Para analizar si un grupo de tareas escolares con calculadoras gráficas, un material manipulativo como el círculo de fracciones o un software específico se adecuan a las exigencias de la planificación previa de una U.D., es conveniente incorporar un procedimiento que ayude a analizarlo, describirlo y decidir sobre su conveniencia en el marco de la programación que se haya hecho del tema en cuestión.

Analicemos un ejemplo: Situemos la enseñanza en primero o segundo de ESO en el contexto del tópico Números y en las operaciones con números decimales. Vamos a utilizar un software contenido en el CD ROM de ejemplos electrónicos que acompaña a los Estándares Curriculares del NCTM (NCTM, 2003) ya citados en capítulos anteriores. Este CD contiene todo el software que acompaña al libro. Analizaremos las tareas y el material que se proponen en el ejemplo 6.1 del CD-ROM: Puedes encontrar el software en la dirección web: http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=25090

El recurso muestra un eje de coordenadas con un rectángulo de modo que uno de sus vértices es el origen de coordenadas. El lado vertical del rectángulo se puede modificar de longitud y automáticamente se muestra en pantalla el valor de la superficie del rectángulo. (Imagen 3)

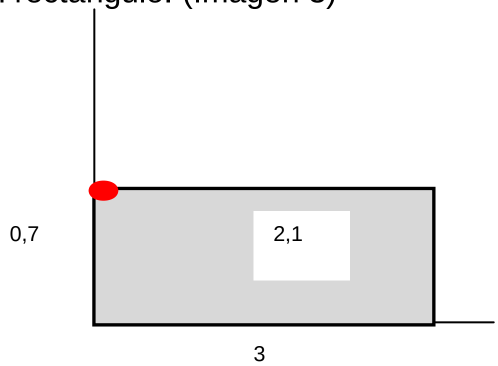


Imagen 3

En la introducción del texto que acompaña a este recurso se justifica así el material: *"Con esta herramienta los alumnos pueden aprender a visualizar los resultados de multiplicar un número positivo fijo por números positivos mayores que 1 y menores que 1. Usando figuras interactivas, pueden investigar cómo cambia el área de un rectángulo al variar su altura manteniendo constante la base. Como se comenta en el Estándar de Números, los alumnos de los niveles medios (primeros cursos de la Ed. Secundaria en España) podrían encontrar dificultades para entender la multiplicación por fracciones y decimales si su experiencia con la multiplicación por números enteros les ha llevado a pensar que "la multiplicación siempre aumenta". En esta figura dinámica, el rectángulo representa el conocido modelo de área de la multiplicación; cambiando la altura del rectángulo, los alumnos pueden ver el resultado de multiplicar un número positivo fijo por números mayores que 1 y menores que 1."*

En la discusión sobre el recurso se indica:
"En los niveles medios, los alumnos deben mejorar su comprensión de las cuatro operaciones básicas aplicándolas a fracciones, decimales, porcentajes y números enteros. El profesor debe estar atento a los obstáculos conceptuales con que pueden encontrarse muchos alumnos después de haber trabajado por primera vez con números enteros. Multiplicar y dividir fracciones y decimales puede resultarles difícil por motivos en gran medida conceptuales, no de procedimiento. Por ejemplo, a partir de su experiencia con números enteros, muchos alumnos conciben la idea de que "la multiplicación aumenta y la división reduce". Cuando se les pide que resuelvan problemas en los que tienen que decidir si multiplican o dividen fracciones o decimales, esta idea puede tener consecuencias negativas. (Greer, 1992) "
Los argumentos esbozados para justificar este recurso pueden organizarse así.
Objetivo general del recurso: Mejorar la comprensión de las operaciones básicas con números decimales y fracciones.
Obstáculos y dificultades posibles: Considerar que la multiplicación siempre aumenta y la división reduce.
Contenidos que se manejan: Las tareas se refieren a la comprensión de un concepto: Multiplicación en el campo de los números fraccionarios o decimales. No se busca la destreza en el cálculo con decimales.
Los alumnos pueden haber adquirido la idea de multiplicación de naturales como suma indicada de sumandos iguales e inferir que el resultado será mayor que los sumandos

Es posible que se les haya introducido la multiplicación como un operador:

Ej.: 6(2/3) se obtiene así: A 6 le aplico el operador (*2) y al resultado el operador (:3).*

Entre los diferentes significados que el alumnado posee acerca de “multiplicar”, algunos pueden constituir un obstáculo para la comprensión de otros significados cuando se amplía el campo numérico.

<u>Modos de representación de la operación:</u>

Es habitual expresar el resultado de la multiplicación como un número sin más. En la tarea se utiliza el modelo del área reduciendo el análisis de la tarea a una comparación de áreas. Se incorpora, pues una forma gráfica de representar la multiplicación.

<u>Utilización de la multiplicación en contextos: Fenómenos y modelización</u>.

Ekenstman and Greger (1983) observaron cómo hay alumnos de 12 o 13 años que eligen la división en lugar de la multiplicación en problemas muy similares cuya variación se presenta solamente en el tipo de números.

Ante los dos ejercicios siguientes:

Un queso pesa 4 kg. 1kg cuesta 7 euros. Encuentra el precio del melón ¿Qué operación debería hacerse?

*4: 7 4*7 7:4 4+4+4*

Un melón pesa 0,923 kg. 1kg cuesta 2,75 euros. Encuentra el precio del melón ¿Qué operación debería hacerse?

*2,75+0,923 2,75:0,923........... 0,923*2,75......... 2,75-0,923*

Los autores señalan la existencia de alumnos que responden “la multiplicación” en el primer ejercicio y “la división” en el segundo. En su análisis argumentan que la respuesta errónea de elegir, en el segundo caso, “la división” ocurre porque piensan que el resultado debe ser menor que 2,75 euros y no puede ser “de multiplicar porque la multiplicación siempre aumenta y la división disminuye”

El ejemplo muestra en qué medida un significado erróneo de un concepto arrastra a la modelización incorrecta de problemas situados en contextos.

<u>Objetivos y competencias de aprendizaje:</u>

Otro de los factores que implicaremos en este análisis de tareas con materiales y recursos consiste en observar en qué medida las tareas que se realicen con él pueden contribuir al desarrollo de las competencias que el aprendizaje de la matemática en Educación. Secundaria persigue.

Estas competencias pueden formularse de diferente forma según la fuente de información que se maneje. En el texto que justifica este recurso se observa que se orienta a la competencia "razonar en matemáticas". A su vez, al comprender mejor las operaciones básicas se puede favorecer el uso de estas en la modelización de situaciones y contextos (competencia en Resolución de Problemas de modelización).

2.2 ANÁLISIS DE TAREAS EN EL MARCO DE LA U.D.

En la presentación de este recurso se sugieren varios tipos de tareas genéricas para aprovechar este modelo dinámico de la multiplicación.

1. Elaborar un análisis sistemático de los casos en que el resultado es mayor o menor que el multiplicando y justificar cuando el resultado aumenta o disminuye en relación con el multiplicando
2. Construir descomposiciones de números que permitan utilizar la propiedad distributiva para argumentar acerca de cuando el resultado sale mayor o menor que el multiplicando.
3. Inventar problemas que requieran resolverse con multiplicaciones y utilicen datos de contextos cotidianos.

Un detalle de estos tipos de ejercicios secuenciados adecuadamente se presenta en el ejemplo que sigue.

<u>Ejercicios para razonar los efectos de multiplicar sobre el resultado de la multiplicación</u>

Tarea 1: La siguiente figura muestra un rectángulo de base 3 y altura **y**. El producto 3 ◦ **y** representa el área del rectángulo "3-por-**y**". Al cambiar el valor de "**y**" arrastrando el punto rojo hacia arriba y hacia abajo sobre el eje vertical, se observa que el área del rectángulo va cambiando simultáneamente. Utiliza el área del rectángulo "3-por-1" como referencia (tres unidades cuadradas), y compárala con el área de los rectángulos "3-por-**y**" cuando **y** es mayor que 1 y cuando **y** es menor que 1.

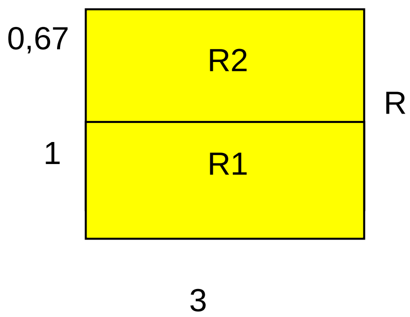
a) Completa las casillas vacías en la tabla desplazando en la gráfica los valores de y

y	Compara **y** con 1	3•y=	3•y < 3	3•y > 3
0,83	y<1	2,49	si	no
1,05				
2,40				
0,50				
		0,81		
		4,02		
	y>1			
	y<1			

b) ¿Cómo crees que debe ser **y** para obtener un resultado mayor o menor que 3? ¿Estás seguro?

Tarea 2: Vamos a tratar de asegurarnos más de las conclusiones que se hayan podido tomar en el apartado anterior

a) En la gráfica habrás observado que si tomamos un valor de **y** mayor que 1 el área del rectángulo amarillo se puede considerar la suma del área de dos rectángulos. Uno de ellos mide siempre 3 cm^2.



Por ejemplo: Si dibujas un rectángulo de dimensiones 3cm por 1,67 cm. se descompone en dos rectángulos. Uno mide 3 cm^2 ¿Cuánto mide el otro?

Ayudándote de estas figuras, ¿qué argumentos tienes para asegurar que?

Si y>1 entonces 3•y > 3

Utiliza también las descomposiciones en rectángulos para justificar que

Si y<1 entonces 3•y < 3

b) ¿Qué ocurriría si en las propiedades anteriores utilizas cualquier otro número distinto de 3 y mayor que 1? Prueba a dibujar rectángulos en tu cuaderno para razonar las respuestas. Intenta enunciar una propiedad para estos casos.

Tarea 3: Razona en la tabla siguiente, sin hacer las operaciones, si los resultados de multiplicar ambos números son mayores o menores que el multiplicando

Multiplicando X	Multiplicador y	Resultado (R=x•y) es mayor o menor que x	Argumento
5	1,25	R > 5	y es mayor que 1
7	0,98	R 7	
4,1	0,12	R 4,1	
11,01	1,97	R 11,01	
2,25	1,01	R 2,25	
2,17	0,99	R 0,17	

Tarea 4: Un kilogramo de jamón vale 12,25 euros; sin hacer operaciones responde. Para comprar 0,750 Kg ¿necesito más o menos de 12,25 euros?

a) Un queso pesa 0,850 kg. 1kg cuesta 6,75 euros. ¿Qué operación debería hacerse para encontrar el precio del queso? (Rodea la operación correcta)

6,75+0,850 6,75:0,850............ 0,850*6,75......... 6,75-0,850

b) Un ciclista, a velocidad constante recorre 0,011 Km cada segundo ¿Qué operación debería hacerse para encontrar la distancia que recorre en 0,3 segundos? (Rodea la operación correcta)

0,011:0,3 0,011+0,3 0,011-0,3 0,011* 0,3

c) Voy a realizar una fotocopia que reduzca un dibujo rectangular de superficie S al 70% de su superficie. ¿Qué debo hacer para calcular la superficie del nuevo dibujo? (Rodea la operación correcta)

1. Multiplicar S por 0,3
2. Multiplicar S por 0,7
3. Dividir S entre 0,7
4. Dividir S entre 0,3
5. Dividir S entre 0,7 y restarle el resultado a S

d) Inventa los enunciados de tres problemas diferentes de la vida cotidiana para ponérselos a tus compañeros y comprobar si utilizan bien las dos conclusiones que se han obtenido en la tarea 2

Relaciones entre las tareas y las competencias generales: los niveles de complejidad

Un análisis pormenorizado llevar a construir la tabla de la imagen 4 poniéndose en el lugar del ejecutor del problema y pensando en las competencias que puede involucrar al realizarlo. Para graduar la complejidad ha servido de ayuda la tabla que establece el libro del marco PISA que se ha citado en este capítulo p. 42-48

Muy probablemente cada tarea implica más competencias de las desarrolladas pero se ha preferido marcar las más relevantes

Análisis de tareas desde las competencias y la complejidad

	Tarea										
Competencia	1ª	1b	2a	2b	2c	3	4a	4b	4c	4d	4e
Pensar y Raz.r	R			C	RF	R	R	C	C	C	RF
Argumentar		C	C	RF	RF	R					
Comunicar		R	C	RF	RF						RF
Modelar										C	
Plantear y resolver problemas							C	C	C	RF	RF
Representar			R	C	R						
Utilizar lenguajes	R					R				R	

R= Reproducción C= Conexión RF= Reflexión

Imagen 4

Actividad 2: Elaborar un comentario sobre las ventajas puede aportar al trabajo de un docente utilizar esta tabla para relacionar competencias matemáticas y grados de complejidad con tareas escolares ¿Cuales son las dificultades más importantes que se encuentran al confeccionarla?

Ubicación de las tareas en la secuenciación de la U.D.

Estas tareas pueden incorporarse en una UD sobre operaciones con decimales en 1º o 2º de ESO. Tienen cabida para afianzar la comprensión, a medida que se repasan las operaciones y se adquieren nuevos significados de la multiplicación y sus propiedades. También pueden utilizarse selectivamente con alumnos en los que se les detecta el tipo de error aludido.

Previsión de la actividad del alumno en el aula.

La funcionalidad del material no solamente depende de sus características sino de la guía de preguntas que el profesor proponga y que actúan como un andamiaje soportando la actividad previsible del estudiante. (Limitarse a preguntar ¿qué observas? Puede producir respuestas muy pobres. P. Ej. "Observo que si se tira del punto rojo para arriba los resultados aumentan y si se tira para abajo disminuyen"). El primer grupo de tareas está orientado, a un análisis de casos particulares para que se encuentre una conjetura. En el segundo grupo se pretende que justifiquen la conjetura utilizando como base la propiedad distributiva.

Ya hemos señalado que la tarea propone una actuación en el alumno. La previsión por parte del profesor del tipo de actividades es otro indicador a la hora de decidir si el recurso se adecua más a menos a nuestras pretensiones.

Este recurso como modelo dinámico, evita la realización de cálculos para centrarse en la reflexión sobre los resultados. Pero con una calculadora usual también podrían evitarse.

La novedad reside en que los resultados de la multiplicación se presentan de modo visual, como un área, para facilitar las comparaciones rápidas entre resultados y en especial con el rectángulo de área 3. La complejidad menor debe residir en establecer la conjetura. La complejidad será mayor para localizar cómo la propiedad distributiva explica el aumento o disminución del resultado respecto al multiplicando

$(3* 1,3) = 3*1 +3(0,3) > 3$

$3*(0,7)= 3(1+(-0,3))= 3 –0,3 <3$

Gestión del profesor de las tareas en el aula:

Admitamos que el usuario del programa es un alumno o una pareja de alumnos. Conviene destacar que la actividad solicitada al alumno no se limita a desplazar el punto, observar los resultados gráfica y numéricamente y

determinar en qué momento "se supera la superficie de área 3". Se solicitan argumentaciones y uso de propiedades que conduzcan a superar un obstáculo.
Para una tarea de estas características el profesor debe prever en la gestión del aula que será necesario anotar las opiniones de los alumnos, ordenarlas y sistematizarlas, completar argumentaciones a medias, resumir y otras acciones encaminadas a que los alumnos aprendan a argumentar y justificar con eficiencia.
Si se incorporan los ejemplos referidos a inventar problemas, ya citados, el significado del área como resultado de multiplicar se enriquece mucho. El número que se obtiene para la superficie puede significar la medida de una longitud, de una superficie, la cantidad de pares de un producto cartesiano, costes de un producto, espacio que se desplaza un móvil, etc. Se recorren fenómenos diferentes que se modelizan y se interpretan con la misma operación matemática, independizándola de la noción de multiplicar como suma de sumandos iguales que puede conducir a arrastrar el error citado. Este repaso por diferentes significados fenomenológicos de la operación de multiplicar contribuirá a incrementar la competencia en plantear los problemas de contextos.

Otras consideraciones sobre el diseño del material:

Comentarios al diseño: Podría argumentarse que el modelo permite variar solamente los valores de uno de los factores. Esta limitación quizá está planteada por que algunas de las investigaciones citadas en el artículo de Greer (1992) hechas en este ámbito sugieren que los errores se cometen cuando los valores del multiplicador son mayores o menores que 1 y los valores del multiplicando (el tres) no influyen demasiado en el error del alumnado. Así el análisis se centra en la variación del resultado a medida que lo hace uno de los factores.

2.3 ESQUEMA DE ANÁLISIS Y PROPUESTA DE ACTUACIÓN:

En esta sección se ha hecho referencia a un conjunto de conocimientos y decisiones que orientan la creación y el uso adecuado de un recurso sencillo como este modelo dinámico de áreas para multiplicar. Lo resumimos en la tabla que sigue:

Contenido matemático	Tipos de contenidos y significados que se utilizan
	Modos de representación
	Fenómenos que dan significado al concepto
	Modelos en donde se aplica
Objetivos del aprendizaje y competencias matemáticas	¿Qué objetivos preferentes se marcan en las tareas a realizar con el recurso?
	¿A qué competencias u objetivos generales se apunta con prioridad? (referirlas a las que se indican en el proyecto PISA)
	¿Cómo es previsible que actúen los alumnos?
	¿Qué dificultades u errores se tendrán en cuenta?
Tareas que se proponen al alumno	¿Qué tareas se proponen?
	¿Cómo se organizan y secuencian las tareas?
	¿En qué lugar se ubican dentro del desarrollo de una Unidad Didáctica más amplia?
	¿Qué grados de complejidad en relación con las competencias presentan las tareas previstas según los niveles del proyecto PISA? Utilizar la tabla del anexo 1
	¿Cómo se gestionaría el aula para poner las tareas en ejecución? ¿Qué haría el/la profesor/a mientras los alumnos realizan cada una de ellas?

3. ORGANIZADORES CURRICULARES PARA LA PLANIFICACIÓN DE TAREAS EN UNIDADES DIDÁCTICAS

En los capítulos de este libro el centro del tema gira alrededor de los materiales y las tareas con ellos. Este capítulo avanza en la sistematización del proceso de planificación del trabajo de clase. Para ello se maneja un instrumento organizativo muy conocido para el profesor: la Unidad Didáctica. Sin embargo, el contenido de esta Unidad Didáctica incorpora elementos que ya se han esbozado en la sección 2 de este capítulo para dar más solidez a las decisiones que el profesor toma cuando prepara sus clases con cierto nivel de detalle.

En esta sección se describen las ideas primordiales que soportan este procedimiento de planificación y que, siguiendo la terminología que utiliza Rico, L. (1997, Rico, L. ed.), denominamos organizadores curriculares.

La información que aportan a la planificación docente los currículos establecidos y las secuenciaciones de contenidos que los boletines oficiales publican se muestra claramente insuficiente para llegar al nivel del aula y decidir acerca de qué es lo que un alumno o alumna de Secundaria debe aprender cada día y cómo hacerlo operativo.

Los libros de texto que publican las editoriales y sus complementos en forma de libro del profesor ocupan el espacio intermedio entre la secuenciación general del boletín oficial y la planificación diaria que el profesor hace respondiendo a la pregunta ¿en qué trabajo con mis alumnos hoy? ¿Qué expectativas tengo respecto a lo que van a aprender? ¿Cómo selecciono y estructuro las clases para que el alumno alcance las expectativas previstas? Pero los libros de texto se redactan para perfiles de alumnos y profesores que no necesariamente coinciden con cada realidad de un centro y un aula. La información que contienen, las estrategias didácticas que organizan el contenido, la selección de tareas que realizan y la limitación de recursos que supone hoy día un libro, obligan cada vez más a que el profesor utilice el libro de texto más como un apoyo a su trabajo en el aula que como una guía de actuación para seguir al pié de la letra.

Los organizadores curriculares son “conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas (Rico, L. 1997, p. 45)

1. La primera fuente de información, primer organizador, para elaborar la unidad didáctica procede del currículo oficial que prescribe el Ministerio de Educación o las Comunidades autónomas y consiste en localizar la ubicación del tema que deseamos desarrollar, el curso o nivel en la secuenciación vertical que ofrece el currículo, la referencia al programa de contenidos y las finalidades u objetivos que se esperan alcanzar. Es conocido que esta fuente de información aporta un marco necesario aunque incompleto para realizar el trabajo que nos ocupa. Esta referencia es necesaria para no salirse del terreno de juego que marca la ley.

2. El segundo contenedor de conocimientos (u organizador) es la estructura de los contenidos del tema considerando su organización cognitiva. Este conocimiento conduce a elaborar listas de conocimientos que tengan el carácter de conceptos, procedimientos o actitudes. Además los conocimientos conceptuales pueden referirse a hechos, términos, notaciones, convenios, resultados o conceptos y los conocimientos procedimentales pueden clasificarse en destrezas, razonamientos o estrategias. Este análisis del contenido matemático desde una perspectiva cognitiva comienza a situar la matemática como objeto de aprendizaje. ¿Qué se memoriza solamente? ¿Qué debe comprenderse y compartir diferentes significados?, ¿Qué se aplicará de forma mecánica? ¿Qué conocimiento requiere un pensamiento de alto nivel e involucra más habilidades mentales? El profesorado necesita hacer este ejercicio para prever el grado de complejidad del contenido con el que va a trabajar.

3. El tercer organizador contiene el conocimiento derivado del análisis fenomenológico de los conocimientos matemáticos. ¿Qué fenómenos están detrás de este conocimiento? ¿En qué situaciones y contextos aparece el contenido matemático de referencia? Ya se ha insistido anteriormente como la

evaluación PISA potencia la necesidad de este tipo de análisis. Los conceptos matemáticos como "medios de organización de los fenómenos" adquieren su significado matemático en la medida en que "resumen" propiedades o regularidades de los fenómenos y, a la vez, resuelven parte de los problemas con los que nos enfrentamos cuando nos movemos en el mundo real. (El capítulo III del libro ya citado "La Educación matemática en la Enseñanza Secundaria" Rico L. (coord.) Ed. Horsori 1997, desarrolla con más amplitud esta perspectiva del análisis fenomenológico y su importancia en la enseñanza de la matemática.)

4. El cuarto organizador acumula la información referente a <u>las representaciones de los conocimientos matemáticos que se utilizan en el tema</u>. Cualquier conocimiento matemático sabemos de él a través de una representación que puede ser gráfica, numérica, simbólica, geométrica plana o tridimensional, icónica, esquemática, plástica, verbal, etc. Cada representación aporta matices diferentes del concepto matemático, tiene sus ventajas e inconvenientes, conduce a una parcela del saber. Hay procedimientos matemáticos ligados al lenguaje gráfico, a representaciones esquemáticas o a destrezas algebraicas. Procede pues, conocer con detalle con qué representaciones se van a articular los conocimientos del tema. El abuso del lenguaje algebraico en cursos más inferiores es frecuente y en este sentido los materiales y recursos didácticos aportan representaciones válidas para dar significados a multitud de conceptos y operaciones como hemos podido comprobar con las fracciones en el capítulo 1 de este libro.

5. El quinto organizador recopila el conocimiento sobre <u>errores y dificultades</u>: los datos que pueden obtenerse de la experiencia personal, los resultados de investigaciones y la abundante bibliografía que se dispone sobre errores y dificultades en libros de didáctica de la matemática.
Los trabajos publicados sobre errores y dificultades no solamente manifiestan aquellos conceptos con mayor dificultad de aprendizaje y la tipología de los errores sino que también hacen propuestas de solución, algunas de las cuales incorporan recursos de aprendizaje específicos. Es el caso de algunos

ejemplos electrónicos que incorpora el CD- ROM de los Estándares del NCTM del año 2000 ya citado (trad. SAEM Thales 2003) Uno de estos ejemplos se ha trabajado con exhaustividad en la sección 2 de este capítulo.

6. El sexto organizador se refiere a la búsqueda de información necesaria acerca de los materiales y recursos que pueden incorporarse a la enseñanza del tema. No todos los temas tendrán la misma cantidad de recursos accesibles, y una recopilación inicial amplia permitirá ubicar el recurso más adecuado en su momento aunque algunos de ellos no se manejen durante mucho tiempo de aprendizaje.

7. El séptimo organizador llama la atención a la necesidad de acercarse a la Historia de la Matemática del tema o núcleo de temas que se están desarrollando con varias finalidades:

- Reconocer, a través de la evolución de las matemáticas su utilidad y los problemas fundamentales que han ido resolviendo a lo largo de la Historia.
- Presentar las matemáticas como una ciencia en evolución.
- Explorar errores del pasado para ayudar a comprender dificultades de aprendizaje.
- Motivar la aparición de algunos conceptos y soluciones matemáticas a través de la Historia.

Actividad 3

1. Haz un breve informe de la información que ya dispones para la preparación de una Unidad Didáctica que vayas a confeccionar presentándola siguiendo el esquema de esos organizadores. Indica aparte si hay alguna otra información externa que hayas manejado y no se pueda encuadrar en ninguno de los organizadores que hemos descrito

4. ORGANIZACIÓN Y ESTRUCTURA DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA.

Entre los diferentes formatos de unidad didáctica posibles hemos elegido una estructura ligada a un instrumento para elaborar unidades didácticas que denominamos análisis didáctico y que se está utilizando como instrumento de formación del profesorado por algunos autores de la publicación.

En el análisis didáctico de un tema escolar objeto de planificación en una unidad didáctica distinguimos tres fases:

1. Durante el **Análisis del contenido** se sistematiza y se toman las decisiones fundamentales sobre el contenido que va a estructurar a la Unidad. Para ello se tienen en cuentan los datos obtenidos en los organizadores 1 al 4 y el 7. Ello significa realizar:

1.1 Desarrollo histórico del tema.

Evolución histórica del tema. Selección de los acontecimientos más sobresalientes desde la perspectiva de su posible utilización didáctica.

1.2 Estructura conceptual.

Descripción de los contenidos específicos del tema y otros relacionados dentro del marco de la Educación Secundaria. Análisis y relaciones de los tipos de contenidos (conceptuales, procedimentales, y actitudinales) en un esquema jerarquizado o mapa conceptual

1.3 Sistemas de representación

Descripción de los modos de representar los contenidos más usuales en el tema especificando ejemplos y contenidos relacionados con la traducción entre ellos

1.4 Fenomenología del tema y modelización

Descripción de los principales fenómenos encontrados que se expliquen o sirvan de modelo a los contenidos del tema. Descripción de las relaciones entre la estructura conceptual que modeliza y el fenómeno mismo. Descripción de algún problema de contextos cotidianos o científicos que se resuelva mediante un proceso de modelización.

1.5. Contenidos específicos de la Unidad Didáctica (U.D.)

Ubicación del tema en la secuenciación de contenidos de los documentos curriculares oficiales de la E.S.O. y el Bachillerato. Descripción de los contenidos específicos de la U.D. Clasificación según tipo de contenidos. Referencia a los sistemas de representación que se van a utilizar. Descripción de las relaciones entre los contenidos y sistemas de representación en un Mapa Conceptual. Especificar los criterios utilizados para la selección de contenidos.

2. La segunda fase se denomina de **Análisis Cognitivo**. En este periodo se tiene presente el análisis de los contenidos realizado, cómo se han organizado en grandes focos y que aspectos cognitivos ya se han esbozado. Con ello se fijan las metas que se espera alcanzar formulándolas en términos de capacidades y se señalan los errores y dificultades que con más énfasis se va a tratar de remediar y que fueron analizados en el organizador 5.

2.1 Objetivos que se esperan desarrollar

Focos prioritarios en el aprendizaje del tema. Enunciado de las principales capacidades que se desarrollarán en la Unidad Didáctica. Agrupación de capacidades por focos prioritarios y vinculación de cada una con las siete competencias PISA consideradas en el tema. Análisis y valoración de las capacidades a las que se les va a dedicar más tiempo. Especificar los criterios usados para seleccionar capacidades.

2.2 Errores y dificultades previsibles en el desarrollo de la U.D.

Descripción de algunos errores y dificultades reconocidos, en relación con el contenido y las capacidades del tema elegido. Ejemplos de tareas que puedan usarse para detectar algunos de esos errores y para tratarlos.

3. La tercera fase se denomina **Análisis de Instrucción.** En ella, y en consonancia con las dos fases anteriores se proponen las tareas de aprendizaje que constituirán las secuencias didácticas de varias sesiones de clase y se explica y valora el uso de los materiales y recursos elegidos junto al proceso de evaluación.

Materiales y Recursos en el aula de Matemáticas.

3.1 Recursos y materiales didácticos.

Describir los recursos y materiales que pueden utilizarse en el tema. Justificar la selección de los recursos.

3.2 Secuenciación y Organización de las tareas en la U.D. Gestión del aula

Describir en grandes líneas cómo se van a organizar las sesiones de trabajo de la U.D. y señalar algunos tipos de tareas que se van a manejar en ella. Describir con detalle los tipos de tareas que se realizarían con los recursos y materiales elegidos. Dar ejemplos, de algunas tareas significativas por su función en el desarrollo de la U.D (en la construcción de significados, en la corrección o prevención de errores y dificultades o en el proceso de evaluación). Ejemplificación de tipos de tareas según su complejidad: *reproducción*, *conexión* y *reflexión* argumentando los criterios para esa clasificación.

3.4 Desarrollo de la secuencia de tareas de la U.D.

En el trabajo de la U.D. se concretarán cuatro sesiones de trabajo de 1 hora. Para esas cuatro sesiones en conjunto habrá unos objetivos a perseguir que pueden enunciarse en términos de capacidades. Para cada sesión describir el desarrollo de la misma: objetivos de esa sesión, secuencia de las tareas para los alumnos durante la clase y las tareas de casa (si las hubiera). Recursos utilizados. Resumen de las intervenciones del profesor y de las estrategias de gestión en el aula. Observaciones a algunas tareas significativas por su función en el proceso de aprendizaje

3.5 Evaluación de aprendizajes en la U.D.

Señalar las tareas de las sesiones de clase que se dedican a hacer evaluación de tipo inicial, formativa o sumativa. Preparar un sistema de evaluación de aprendizajes de toda la U.D. asociando las tareas empleadas con las capacidades y competencias a evaluar. Especificar los criterios que han llevado a seleccionar las tareas de evaluación y el peso que se da en la evaluación a las diferentes capacidades.

5. DISEÑO DE UNIDADES DIDÁCTICAS EN MATEMÁTICAS

En esta sección simularemos el proceso de diseño de una Unidad didáctica según la guía introducida en las primeras secciones del tema. Con la información introducida aquí y los resultados de vuestras aportaciones mediante las actividades que se proponen para contestar en el Foro, haremos un resumen final en el que se presentarán las diferentes alternativas de Unidad didáctica que surjan.

El tema en que centraremos el trabajo es la Geometría de Transformaciones. Conforme se vayan definiendo las expectativas de lo que esperamos que aprenda el alumno, la Unidad se referirá con más detalle a las simetrías, aunque se presenten los tres movimientos más conocidos.

La ubicación en el curso para el que pensamos introducir el tema es 2º o 3º de ESO, si bien, como es un tema en el que no se secuencian demasiado los contenidos por cursos podremos permitirnos ciertas libertades e incluso esbozar una posible subdivisión en dos cursos diferentes.

5.1 EL CURRÍCULO OFICIAL

Un decreto de secuenciación de la Junta de Andalucía derivado de la LOGSE y otro del Ministerio de Educación y Ciencia es una muestra de los contenidos oficiales para no salirnos del marco en que los alumnos pueden ser evaluados: Ver anexo E1 y E2 al capítulo 5

Entre ambas referencias tenemos una amplia panorámica de los contenidos curriculares que necesitamos.

Observación global: El enfoque que da esta normativa curricular es de tipo cualitativo (en contextos de manipulación de figuras) y, solamente en cuarto de ESO se llega a un inicio del tratamiento matemático como objetos en la opción B. Los contenidos son muy amplios por lo que su tratamiento no se hace en profundidad. Las expectativas que se adivinan se refieren básicamente a estos tipos de capacidades:

- comprender el significado de las movimientos descritos,
- reconocer cuando existe un movimiento entre varias figuras,
- construir figuras por movimientos

- construir y reconocer composiciones de movimientos
- aplicar los conocimientos sobre movimientos en situaciones prácticas como la construcción de frisos y mosaicos, la semejanza de figuras mediante homotecias o la localización de movimientos invariantes de una figura.

5.2 ORGANIZACIÓN COGNITIVA DE LOS CONTENIDOS

2.a El contenido

No es el lugar para precisar los contenidos matemáticos subyacentes a este tema. No obstante, una pequeña organización conceptual en forma de mapa ayudará a elaborar la unidad y a darnos una visión de conjunto. (Imagen 5)

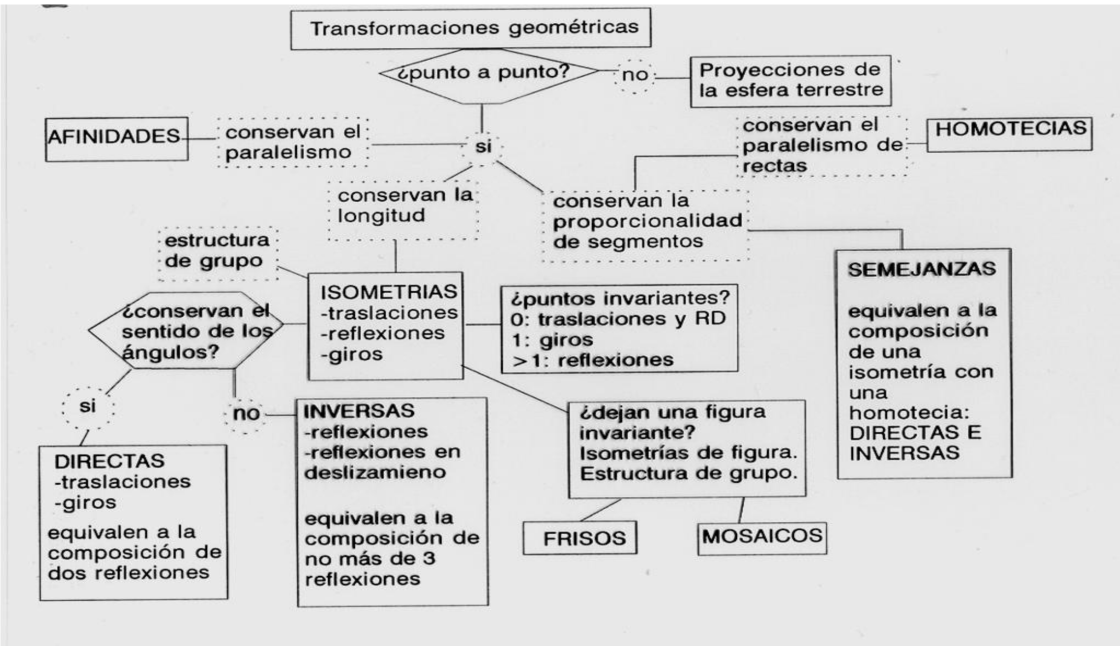


Imagen 5

2.b La organización cognitiva

Ya es habitual en las programaciones tener en cuenta que hay contenidos de carácter conceptual, procedimental y actitudinal. Dentro del conocimiento conceptual y el procedimental se implican actividades mentales diferentes según se pretenda comprender un concepto, memorizar una notación o un resultado o justificar/ reproducir un procedimiento. Por ello, para acercarse a la perspectiva de la complejidad que se puede presentar en el alumno cuando aprende matemáticas según esté aprendiendo unos conocimientos u otros nos detenemos en esta organización cognitiva de los conocimientos del tema. La

Imagen 6 siguiente muestra esta organización en el caso de las traslaciones. Esta organización, en principio, puede abarcar más contenidos de los que se manejen definitivamente. No hay problema en seleccionar después.

Actividad:

Conceptos	Hechos, Resultados, notaciones y Convenios	Procedimientos	Destrezas	Estrategias y estructuras
Traslación Vector libre Composición de traslaciones. Invariancia de figuras Frisos Ecuaciones de una traslación	Origen, extremo, dirección, sentido de un vector. (H) Figuras congruentes (H). Espejos, libro de espejos, Mira, rejillas cuadradas e isométricas sistemas de coordenadas (R) Notaciones de vectores, de figuras congruentes, de la composición (N)	Reconocer figuras trasladadas en situaciones escolares y de la vida cotidiana. Construir figuras trasladadas con diferentes formas de representación. Reconocer puntos trasladados por sus coordenadas. Componer dos traslaciones. Descomponer una traslación en la composición de dos	Trazado de rectas paralelas Dibujo de figuras congruentes. Localización del vector de una traslación.	Distinguir figuras que son homólogas según el movimientos que las transforme. Distinguir figuras que son homólogas según una composición de movimientos que las transforme. Datos que caracterizan a una traslación. Reconocer algunas propiedades de la composición de traslaciones

Comenta la tabla 5.1 completándola en lo que creas necesario y presenta una primera aproximación a una tabla semejante con alguno de los contenidos del tema: simetrías, giros, mosaicos. Refleja si aparecen nuevos contenidos en el mapa conceptual después de analizar la referencia que constituyen las últimas versiones del currículo derivadas de la LOE y de la Comunidad autónoma o país en que enmarques tu actuación educativa.

Decisiones: La diferenciación por contenidos conceptuales y procedimentales que pensamos proponer a los chavales y allí precisaremos más el material.

Por otra parte, como el marco de representaciones es geométrico y muchos de estos procedimientos apuntan a *observar* figuras y detectar configuraciones, propiedades o relaciones o a *construir* figuras, la rapidez en el dibujo es importante y no produce el aprendizaje pretendido muy lentamente. Esto apunta al uso de recursos en los que el resultado no se demore mucho. Así se pueden repetir varias veces tareas similares. Es decir, habría que escorarse hacia instrumentos de geometría dinámica o manipulativos. Usar exclusivamente los materiales de dibujo implicaría que, en el tiempo disponible, avancemos menos en lo que se pretende: aprender geometría de transformaciones.

Por otra parte, las instrucciones que se dan para dibujar figuras son complejas de interpretar y, aunque necesarias, no deben convertir esta UD en un tiempo de aprendizaje exclusivo del dibujo lineal.

5.3 LAS REPRESENTACIONES

Es habitual encontrar en los libros de texto modos gráficos diferentes de presentar los movimientos:

La cuadrícula en la que se apoya el alumno para contar y medir distancias o ángulos. Se puede simular esta representación con un geoplano como el que se maneja en el CD de Estándares 2000 citado.

El papel en blanco con auxilio de los útiles de dibujo. Se puede hacer alguna simulación de la representación en papel blanco con el plegado de papel para las simetrías o la superposición con transparencias o papel vegetal para los giros. El caso de las traslaciones también existe el plegado teniendo en cuenta que equivalen a la composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos. El software del CD citado se apoya en este sistema de representación sin uso de útiles de dibujo que el alumno debe sustituir por su percepción y estimación visual.

El modo gráfico analítico clásico es el sistema de coordenadas cartesianas en cuyo sistema de representación se apoyan la mayoría de los resultados que se manejan el bachillerato, referidos a trasformaciones geométricas con funciones

Dentro de los modos no gráficos de representación tenemos el algebraico y el matricial. El inicio a las ecuaciones de los movimientos en forma algebraica son el último modo de representar en la etapa obligatoria de la ESO (tratamiento de las transformaciones como objetos, como aplicaciones del plano en sí mismo) y requieren de la forma analítica de representación para su correcta interpretación.

El uso de unas u otras representaciones en las tareas escolares dependerá de nuestros objetivos. La cuadrícula, el plegado en papel blanco o el dibujo aportan significados y percepciones visuales de los conceptos geométricos que presupone la representación algebraica o matricial. En cambio, estas últimas son útiles en problemas en las que las figuras y objetos vienen definidos por coordenadas.

Decisión: El estudio de las isometrías se ajustará prácticamente a sus representaciones gráfico-geométricas en diversos soportes (geometría sobre el plano o sobre el plano cuadriculado)

Solamente, en el caso de las traslaciones se podrá iniciar la representación analítica (componentes del vector traslación)

5.4 ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO DE LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS

Situaciones

Por una parte, las transformaciones geométricas tratan de organizar fenómenos físicos de movimiento aunque presentan diferencias sustanciales con ellos: No se hacen en el tiempo; no importan las imágenes intermedias, son aplicaciones del plano en sí mismo frente a la noción de movimiento que se refiere a una figura que se desplaza.

En cierto sentido la transformación como "movimiento de una figura" explica el fenómeno de ver en qué sentido la figura "movida" se parece a la inicial y se ha podido desplazar en un solo paso. Cuando se van analizando de las transformaciones geométricas otros aspectos como su composición o la noción de aplicación del plano en sí mismo se desvanece el fenómeno físico necesitando otros apoyos más conceptuales.

De otra parte, las trasformaciones geométricas tratan de explicar, en el ámbito del diseño, la repetición y semejanza de objetos y el equilibrio estético que presentan.

Hay un problema básico que consiste en analizar cual es el dibujo o motivo más pequeño que, por transformaciones genera un mosaico, un friso o un estampado. Un criterio de economía de trabajo se persigue en esta búsqueda. Solamente es necesario dibujar manualmente el motivo mínimo, ya que el resto

se genera por transformaciones que encontramos automatizadas en cualquier software de diseño asistido. (Alsina, Pérez, Ruiz Simetría dinámica,1989); (Bossard, 1. Rosaces, frises et pavages 1979)
Otro problema parecido es reconocer la figura original en una semejanza procedente de la ampliación de un objeto y posterior desplazamiento. (Grupo Beta, 1990)
Un tercer problema se plantea al tratar de "explicar" las razones que justifican un cierto equilibrio o canon estético o una regularidad natural. Por ejemplo tenemos el crecimiento en forma de simetría rotacional de algunos seres vivos, la simetría bilateral o los cánones en las proporciones con que se construyen ciertos edificios. Estos casos encuentran su explicación mediante tipos de transformaciones isométricas o de semejanza que organizan este tipo de regularidad.
Los casos anteriores son ejemplos de situaciones que se pueden organizar y/o explicar con transformaciones geométricas.
Aplicaciones y contextos
Encontramos múltiples aplicaciones de la geometría de transformaciones en campos como el diseño artístico, la construcción, el diseño industrial, la investigación geológica o química con cristales o el software informático de diseño asistido. Cada ejemplo puede ser un motivo potencial para reconocer la matemática en la realidad y extraer una situación en la que presentar una tarea escolar modelizadora. (Steen, L.A.,1998)

Resumen de aplicaciones y situaciones comunes que modeliza el concepto de transformación geométrica
(Alsina- Burgués- Fortuny, 1989)

- Situaciones descriptivas o explicativas:
- La clasificación de los cristales en geología
- El análisis morfológico de los seres vivos
- Clasificación de moléculas en Química
- Las transformaciones invariantes en diferentes teorías físicas.
- Construcciones
- Arquitectura

- Bellas Artes
- Juegos
- Construcciones con programas de diseño asistido
- Predicciones
- Sobre el crecimiento de los cristales, los seres vivos, la transmisión de la información genética, etc.

5.5 LOS ERROES Y DIFICULTADES. DATOS SOBRE EL APRENDIZAJE.

Los contenidos que se van a desarrollar en una U.D. necesitan complementarse con algunos conocimientos que se fijen en cómo el alumno aprende, las dificultades que tiene, en qué cuestiones su aprendizaje se hace más complejo. La composición de simetrías, como contenido matemático no aporta esta información. Tienen que ser otros conocimientos con base psicológica los que ayuden a un profesor a decidir qué debemos hacer para que actúen y aprendan algo.

A menudo, nuestra propia historia personal aporta esta información, a veces sesgada. La experiencia como profesores es, en general, nuestra gran fuente de información en aspectos cognitivos y didácticos. Desgraciadamente aprendemos demasiadas cosas por ensayo-error. ¡Si un médico aprendiera básicamente por ensayo-error los cementerios serían rascacielos!

Afortunadamente, cada vez hay más estudios que nos ayudan a suplir esta falta de información. Es necesario que sepamos dónde están y que sus conclusiones estén redactadas para que podamos implementarlas en nuestras clases de forma cotidiana y sin grandes esfuerzos. Este es el sentido de lo que sigue, aportar datos para ayudarnos a analizar tareas escolares con recursos y materiales. Ver anexo E3

Errores y dificultades

Hay diferentes investigaciones que estudian las dificultades en la comprensión de los conceptos básicos en movimientos.

Destacan autores como Moyer, Thomas, Schulz o Kidder. Estas investigaciones van ampliando progresivamente la calidad y cantidad de ítems de análisis y se puede extraer de ellas algunas consideraciones agrupadas en el anexo E4.

Decisiones: Observamos que la mayoría de las dificultades y errores detectados en investigaciones apuntan por el tipo de isometría, las características de su definición y la diversidad de situaciones en los que se plantee su representación. Debemos pues buscar recursos y materiales que contemplen estas actividades. Si comenzásemos con representaciones en las que el recurso didáctico haga el dibujo no se producirá la detección de la mayoría de los errores detectados. Es el caso de comenzar utilizando el software 6.4 del NCTM Estándares 2000 citados para ejercitar al alumnado en que dibuje las transformaciones. Distinto sería utilizar el software del NCTM 6.4 para comprender la definición de simetría, traslación o giro y sus propiedades de invariancia. Para aplicar las definiciones mediante representaciones podría comenzarse utilizando el geoplano, el papel cuadriculado y después el material de dibujo. El Cabri, con sus utilidades de regla y compás también ayuda a este nivel.

5.6 LA SECUENCIA DEL APRENDIZAJE

También es orientativa la posición que el matrimonio Van Hiele adoptó en relación al aprendizaje de la Geometría derivada de sus niveles de aprendizaje

Las **fases** del aprendizaje según Van Hiele: (Jaime, A., Gutiérrez, A.1996)

Fase 1: Discernimiento. Se presentan a los estudiantes situaciones de aprendizaje dando el vocabulario y las observaciones necesarias para el trabajo. El profesor diagnostica el nivel de los alumnos y alumnas.

Fase 2: Orientación dirigida. El profesor propone una secuencia graduada de actividades sencillas para realizar y explorar. La ejecución y la reflexión propuesta servirá de motor para propiciar el avance en los niveles de aprendizaje.

Fase 3: Explicitación: Los estudiantes, una vez realizadas las experiencias propuestas en fases anteriores, expresan sus resultados y comentarios y toman decisiones justificadas. El lenguaje se va refinando. Durante esta fase el estudiante comienza a estructurar el sistema de relaciones exploradas.

Fase 4: Orientación libre: Con los conocimientos adquiridos, los estudiantes aplican sus conocimientos de forma significativa a otras situaciones distintas pero con estructura comparable. Resuelven “situaciones problema” tomando decisiones en las sucesivas tareas necesarias para construir la solución.

Fase 5: Integración: Los objetos y las relaciones son unificadas e interiorizadas en sus esquemas mentales de conocimientos. Se revisan métodos alternativos. Se ponen de manifiesto los procesos seguidos en el aprendizaje. El profesor actúa unificando propuestas sin avanzar en nuevos conceptos

Decisiones: La mayoría de las tareas escolares que se presentan a los alumnos para iniciarlos en el estudio de la Geometría de Transformaciones en E. Secundaría se situarán en las fases 1, 2 y 3 de Van Hiele. Los recursos y materiales como el geoplano, software 6.4 del NCTM, plegado de papel, espejos, papel con tramas isométricas o cuadradas soportan tareas de estos niveles aunque con diferente perspectiva en cada fase.
Es importante tener en cuenta que con un material didáctico se puede intentar que el alumno evolucione en las fases de aprendizaje que Van Hiele siempre que las tareas sucesivas que se presenten se orienten expresamente a ellas. Tareas pensadas para provocar la exploración del alumno en una isometría (fase de orientación dirigida) no conducen espontáneamente a que el alumno reflexione y detecte todas las características generales del movimiento (fase de explicitación), si no hay una actividad que expresamente demande esta reflexión. Por ello, un grupo de tareas debe dirigirse expresamente a la reflexión, argumentación, justificación y comunicación de los resultados obtenidos

5.7 MATERIALES Y RECURSOS.

Conforme se analiza la información sobre contenidos y aprendizaje relativa a este tema se va abriendo un abanico cada vez más amplio de respuestas a la pregunta ¿qué quiero que aprendan a hacer sobre traslaciones o giros o simetrías?

Los recursos didácticos tienen la gran fortaleza de favorecer exploraciones y ampliaciones en campos muy diferentes pero también es posible que seamos más imprecisos en los objetivos de aprendizaje si nos dejamos llevar y el tiempo disponible no se utilice realmente en lo que deseemos que aprendan. Luego, en la evaluación se plantean cuestiones no suficientemente trabajadas y vienen las sorpresas desagradables.

Decisión: Hay que concretar los objetivos de aprendizaje antes avanzar demasiado con tareas y recursos. El material didáctico es una ayuda para obtener los objetivos de aprendizaje. Incluso modificar o utilizar varios recursos puede ser imprescindible según los objetivos pretendidos.

- Una primera lista de materiales y recursos podría ser:
- papel y tijeras,
- útiles de dibujo,
- libro de espejos,
- papel con cuadrícula grande,
- papel isométrico,
- geoplano, (software del CD del NCTM correspondiente al programa número 4.2)
- meccano,
- Cabri,
- software sobre geometría de transformaciones del CD del NCTM correspondiente al programa número 6.4

5.8 LA PERSPECTIVA HISTÓRICA.

El anexo E5 muestra solamente un guión para ayudar a profundizar más en esta perspectiva histórica de la geometría de transformaciones y en las referencias que de ella se obtengan para completar aspectos motivadores.

5.9 EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

La información recogida mediante los organizadores curriculares permite avanzar en un diseño más concreto de la UD. Vamos a esbozar este tipo de análisis en tres fases: análisis del contenido, cognitivo y de instrucción.

Análisis del contenido.

Centremos la UD en las simetrías. El siguiente mapa conceptual resume los contenidos fundamentales a desarrollar y sus relaciones; Entre llaves se presentan los sistemas de representación que está previsto manejar en cada foco de conceptos. Los diferentes focos tienen su correspondiente conexión con los aspectos fenomenológicos a través de las aplicaciones.

Mapa conceptual simetrías axiales

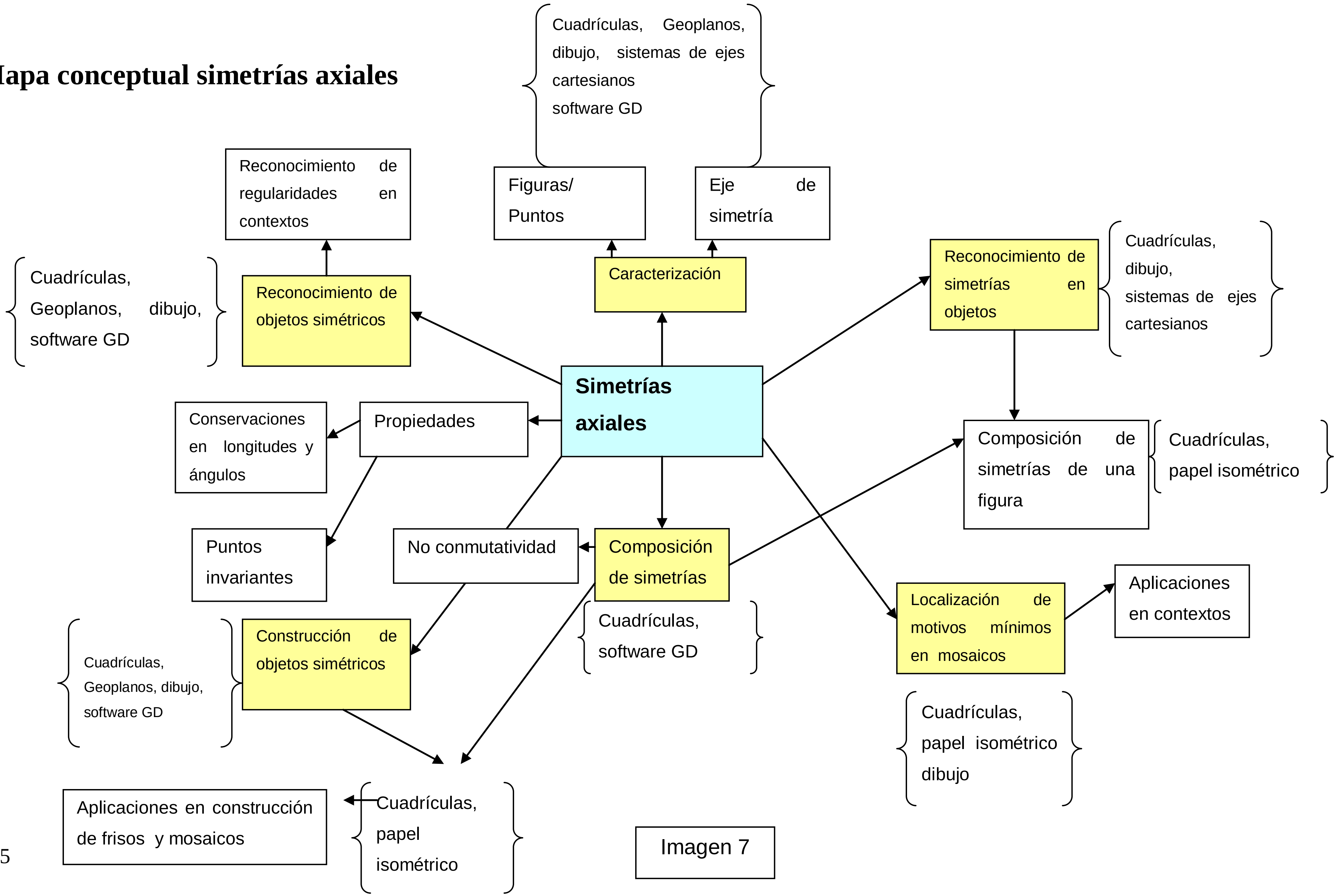


Imagen 7

Los Focos conceptuales que se han destacado en el Mapa conceptual (coloreados en amarillo) son:

a) Caracterizar el significado de la simetría axial, las formas de determinar esta transformación y algunas de sus propiedades como isometría.
b) Distinguir objetos simétricos localizando el eje de simetría
c) Construir figuras simétricas
d) Localizar ejes de simetría en figuras
e) Componer simetrías y utilizar la composición para construir frisos y mosaicos y para analizar las transformaciones que resultan al componer ejes de simetría.
f) Analizar la estructura de un mosaico como recubrimiento (loseta básica), localizar motivos mínimos. Construir frisos y mosaicos partiendo de motivos mínimos

En realidad, cada rectángulo o nudo del mapa conceptual puede referirse a uno o varios conceptos y/o procedimientos. La escasez de espacio en el mapa impide este nivel de desarrollo. Las flechas indican relaciones entre unos conceptos y otros. Algunas son estrictamente jerárquicas y no pueden presentarse al aprendizaje si no se conocen los anteriores nudos del mapa.

El mapa conceptual esquematiza el contenido de la Unidad y orienta acerca de los sistemas de representación más adecuados para facilitar el aprendizaje en cada foco conceptual. Pero el mapa conceptual no define con precisión lo que esperamos que aprenda el alumno sobre cada contenido y en qué medida este aprendizaje contribuye a las competencias generales establecidas en esta etapa. De este aspecto se encarga el análisis cognitivo

Análisis cognitivo.

1. Para cada foco conceptual <u>se desarrollan las expectativas de aprendizaje en forma de capacidades</u>, utilizando verbos que indiquen acciones en el alumno.

Pensemos por ejemplo en el foco b): Distinguir objetos simétricos localizando el eje de simetría.

Materiales y Recursos en el aula de Matemáticas.

Respecto a este contenido se puede esperar que el alumno:

a) Reconozca entre varias figuras las que son simétricas entre sí atendiendo a las propiedades que caracterizan la simetría.
b) Argumente y justifique por qué entiende que dos figuras son simétricas
c) Localice el eje de simetría si dos figuras son simétricas.
d) Distinga a la vez entre figuras simétricas, trasladadas o giradas

Estas cuatro capacidades pueden estimarse diferentes. Para cada una de ellas existirán tipos de tareas genéricas y se mostrarán en sistemas de representación diferentes. No requiere la misma habilidad localizar ejes de simetría en figuras montadas sobre cuadrículas y separadas que dibujadas sobre el papel en blanco e intersectadas o con el eje de simetría oblicuo. Aunque nos referimos a la misma capacidad, las tareas son diferentes y no se puede hablar de que la capacidad se ha desarrollado cuando se ha trabajado con una única tarea o un único tipo de sistema de representación. Tampoco es igual detectar un eje de simetría entre dos triángulos simétricos que en un mosaico, en el plano de una casa o en el rosetón de la fachada de una iglesia.
El análisis cognitivo establece lo que esperamos que el alumno aprenda en forma de capacidades sin precisar aún las tareas concretas de aprendizaje.

2. La segunda componente del análisis cognitivo consiste en <u>relacionar las capacidades elegidas con las competencias matemáticas</u>. Elegimos las competencias PISA. Se trata ahora de pensar en qué forma las capacidades descritas contribuyen más o menos a que se desarrollen estas competencias. Para ello hagamos una tabla de doble entrada como la que sigue y valoremos esta contribución de 0 (Muy Escasa) a 2 (Buena)

Capacidades	PR	AJ	C	M	RP	R	LS
Reconocer entre varias figuras las que son simétricas entre sí atendiendo a las propiedades que caracterizan la simetría	2	0	0	1	0	2	0
Argumentar y justificar por qué entiende que dos figuras son	1	2	2	0	0	1	1

simétricas							
Localizar el eje de simetría de dos figuras son simétricas.	1	0	0	0	0	2	1
Distinguir entre figuras simétricas, trasladadas o giradas	2	0	0	0	0	1	1

Imagen 8

En la mayoría de las capacidades la competencia en Representar (R) y en manejar ciertas operaciones y comparaciones entre puntos o segmentos (LS) es considerable. Igual ocurre con la competencia de Pensar y razonar (PR) utilizando conocimientos matemáticos. La competencia de Resolución de Problemas o de Modelización (M) no se desarrolla mucho salvo que se manejen tipos de tareas en las que los contextos de la vida cotidiana estén muy presentes.

Actividad. a) Desarrolla en capacidades alguno de los demás focos conceptuales de la imagen 6 del capítulo.
b) Realiza una asociación entre capacidades y competencias ayudándote de la imagen 8.

3. Errores y dificultades: El tercer componente del análisis cognitivo se centra en recoger los errores y dificultades previsibles para tenerlos en cuenta en el diseño de las tareas y secuencias de aprendizaje. Resumimos aquí los errores y orientaciones más importantes extraídas del anexo E4.

- Las traslaciones son más fáciles que las simetrías y los giros en ejercicios simples.
- Para cualquier isometría, los movimientos horizontales son mucho más fáciles que en diagonal.
- Los ejercicios con figuras grandes son más sencillos que con figuras pequeñas. Si las figuras son significativas resultan más sencillas que con figuras abstractas.

- Se apunta ya que la dificultad no sólo depende del tipo de isometría sino también del tipo de ejercicio dentro de cada isometría
- Simetrías
  - Errores cuyo origen está en el concepto de simetría
  - Errores cuyo origen está en una interpretación deformada del concepto.
  - Más facilidad al dibujar sobre cuadrículas que sin cuadrículas y con reflexiones horizontales y verticales que inclinadas; más difícil si la inclinación no es de 45º"

Análisis de instrucción.

1. El análisis de tareas se refiere a la selección de tareas coherentes con los contenidos descritos y con las expectativas marcadas.

Nota: (Dado que este trabajo se refiere a materiales y recursos, este análisis se realiza en el contexto de tareas con materiales y recursos y se desarrolla en la sección 6).

2. Tareas con recursos y materiales para la evaluación de los aprendizajes

Trabajar con detalle las relaciones entre el uso de recursos y la evaluación de aprendizajes podría llevarnos muchas páginas y no es el objetivo central del trabajo que nos ocupa. Basta para finalizar este tema unas breves reflexiones acerca de algunos de los problemas que surgen al evaluar cuando en el proceso de aprendizaje se manejan tareas referidas a recursos diversos.

Ya ha quedado suficientemente explicito en este capítulo que buscamos un aprendizaje por objetivos sin olvidar que éstos van desarrollando competencias matemáticas generales que no evolucionan a muy corto plazo. En este supuesto, la evaluación de aprendizajes utiliza como referencia los objetivos.

Pensemos en el objetivo "El alumno será capaz de reconocer si dos figuras se relacionan por una traslación, giro o reflexión"

La secuencia de tareas que habrán realizado los alumnos para aprender este objetivo tendrá relación con variables diferentes como:

• <u>Los recursos</u> en los que se han realizado las tareas: cuadrícula, papel sin tramas, software

• Los contenidos que incluimos en el aprendizaje: ¿reconocer significa simplemente elegir entre varias figuras la que es correcta? ¿reconocer significa incluir la definición de los elementos que caracterizan a la transformación (vector, eje, centro de giro y ángulo?

• Las competencias de comunicación y argumentación que se han implicado en las tareas de aprendizaje: No es igual poner tareas en las que eligen entre varias respuestas o figuras que tareas que impliquen redactar argumentos.

• Los tipos de figuras que se manejen y su complejidad.

La variabilidad en estos datos implica que siempre debemos considerar grados de complejidad para evaluar un objetivo y en esta decisión influye el recurso. Ya hemos visto en el tema 5 cómo es posible graduar la complejidad de las tareas atendiendo a los niveles de reproducción, conexión y reflexión.

Si proponemos una tarea de evaluación con el mismo recurso que el trabajado nos acercamos más al nivel de reproducción, mientras que si pretendemos, por ejemplo, utilizar en la evaluación recursos de dibujo lineal con regla y compás cuando en la secuencia de aprendizaje apenas se usaron, estamos acercándonos al nivel de reflexión en la complejidad. Hay una transferencia en los aprendizajes obtenidos con un recurso a otros.

¿Qué evaluamos?

Esta tendencia adquirida por nuestro propio aprendizaje escolar y universitario a evaluar resultados casi exclusivamente adquiere en el tema de los recursos una significación especial.

En estos temas se ha trabajado con materiales y recursos que ayudan al aprendizaje. La tentación de suponer el aprendizaje acabado y solamente mirar hasta donde se ha llegado está servida. Pero ¿y la competencia en “aprender a aprender” que tanto leemos en la bibliografía pedagógica?

Existen objetivos como éste:

Ser capaz de:

• “Seguir procesos exploratorios para detectar figuras transformadas por movimientos a partir de propiedades globales (paralelismo de lados, igualdad de ángulos entre segmentos transformados, etc.)”

• "Seguir procesos exploratorios para precisar las definiciones de los movimientos del plano y reflexionar sobre ellos"

La mayoría de los recursos que se implican en las tareas que actúan de andamiaje para orientar el aprendizaje, presumen que el alumno es capaz de seguir este proceso de aprender. En definitiva ver si un recurso resulta útil para aprender es detectar si el alumno, con este recurso es capaz de seguir el proceso.

Hay alumnos que se bloquean en el aprendizaje y lo único que sabemos es que sus resultados son nulos. Es necesario evaluar lo que ocurre con ellos en los procesos exploratorios para comprender un concepto o construir un procedimiento.

Para este tipo de evaluación hay que elaborar pequeñas plantillas de observación, con pocos ítems y ligadas al recurso para que se detecte como "se mueve" el alumno en el proceso.

Recursos y evaluación de competencias matemáticas

A lo largo de esta publicación se han puesto ejemplos diversos que muestran cómo el uso de los recursos y materiales puede ayudar a desarrollar las competencias de "pensar y razonar", "argumentar", "comunicar", "resolver problemas", "simular y modelizar", etc.

Pero la utilidad del recurso está íntimamente ligada a la tarea que se proponga realizar con él.

Es posible diseñar tareas con recursos en las que nunca se les pida a los alumnos que argumenten o comuniquen en lenguaje preciso. Es posible manejar el Cabri como un software para dibujar y no proponer actividades en las que simulen o modelicen. Es posible diseñar tareas con recursos como los que propone el software del NCTM en los que la actividad se convierta en un mero ensayo-error.

El recurso no es la garantía para el desarrollo de competencias. La riqueza de la tarea escolar y las demandas cognitivas o retos que se planteen al alumno son parte de la clave.

Esto nos conduce de nuevo y finalmente a valorar el trabajo del profesor como buscador de tesoros, como constructor de tareas ricas y significativas para el aprendizaje.

6. MATERIALES Y RECURSOS EN LA PLANIFICACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA.

El objetivo de lo que sigue es doble: de una parte sugerir pistas para seleccionar un recurso o material entre varios, siempre que enfoquemos la actividad del alumno a conseguir el mismo objetivo con cualquiera de los materiales que manejemos; de otra analizar tareas escolares con estos materiales.

Ejemplo 1

<u>Objetivo</u>: Seguir procesos exploratorios para precisar las definiciones de los movimientos del plano y reflexionar sobre ellos

<u>Contenido</u>: Caracterización de la reflexión en sistemas de representación geométrica sin coordenadas cartesianas.

El alumno, a través de algunas tareas debería ser capaz de precisar que una reflexión se caracteriza por que el eje de simetría es la mediatriz del segmento que une los dos puntos homólogos.

Recursos previsibles:

Plegado de papel y tijeras

Papel cuadriculado

Libro de espejos o espejo

Geoplano del CD del NCTM citado

Software 6.4 del CD del NCTM citado

Software Cabri

¿Es posible reproducir la tarea prevista con el recurso?

Actividad ampliada sobre la base de la propuesta en: Geometría de reflejos (pág. 43 del libro Materiales para construir la geometría, Alsina, Burgués, Fortuny. Ed. Síntesis).

a) Abrir el libro de espejos un ángulo de 120°

b) Colocar sobre su línea divisoria (bisectriz) un pequeño objeto (goma, moneda..) y contar el número de imágenes visibles

c) Colocar perpendicularmente a la línea divisoria un lápiz con los extremos en ambos espejos. Observar la figura determinada.

d) Variando adecuadamente el ángulo entre los 2 espejos, repetir las actividades a, b, c y completar la siguiente tabla.

Angulo	180°	120°	90°	72°	60°	45°	36°
nº imag							

El espejo, el plegado y recorte de papel y el software tipo Cabri o el indicado en el CD del NCTM permiten reproducir las reflexiones. En los demás casos hay que construirlas, lo que presupone que se maneja la definición.

¿Cuales son más sencillos de manejar y rápidos en generar resultados?

Entre los recursos indicados el más sencillo es el plegado de papel. Entre el Cabri y el software del NCTM el segundo es mucho más simple, permite repetir los ejemplos muchas veces variando las figuras y la posición del eje. Se generalizaría a la definición con más rapidez.

Recursos, tareas y competencias

El software manejado por el profesor puede estimular la comunicación y argumentaciones en un grupo activo.

El espejo, con la ayuda del papel, puede ayudar a algunos alumnos a pensar y razonar mediante la representación favoreciendo la competencia de representar. El software elegido exige que todo el análisis sea visual y mental, salvo que se planteen croquis en el cuaderno.

Recursos, tareas y fenómenos

El plegado de papel y el espejo son los dos recursos que mejor se adaptan al proceso de modelización. En ambos casos, una situación (la imagen virtual) o las relaciones que se observan entre figuras recortadas al abrir el papel se explican o modelizan con una simetría. En los demás casos el material didáctico ya simula la realidad.

La gestión del aula y los recursos

Hay recursos como el ordenador que no favorecen la comunicación más que por parejas o en gran grupo. El trabajo en pequeño grupo se posibilita mejor con material manipulativo. En pequeño grupo se suelen comunicar las dificultades y los logros. El grupo pequeño se adapta de forma más natural a un modelo de aprendizaje cooperativo.

Los ritmos de aprendizaje con un software de ordenador se independizan más en la clase y el profesor debe estar constantemente aportando informaciones, muchas veces repetidas a cada pareja que evoluciona a su ritmo. Habrá que tener esta dificultad/ventaja muy presente para dar instrucciones generales suficientes que eviten estar dando constantemente informaciones complementarias a todas las parejas.

Redacción de las tareas

Una vez que se decide el material y se ubica la tarea en la fase de aprendizaje en que se mueve (orientación dirigida o explicitación) procederíamos a redactar la secuencia de tareas. En la redacción consideraremos otras variables que aborden los casos indicados ya para evitar errores o para graduar según los niveles de complejidad.

En este sentido la equidistancia y la visión espacial de que dos figuras reflejadas están situadas a ambos lados de alguna línea imaginaria se puede adquirir con facilidad utilizando cualquier recurso. Sin embargo la perpendicularidad de la línea que une los puntos homólogos respecto al eje de simetría, tal vez requiera un soporte gráfico como una trama rectangular para detectarla con más rapidez.

En Síntesis, aunque sea muy opinable, el espejo proporciona una visión intuitiva muy potente, igual que el plegado de papel. La construcción con un software como el del NCTM es muy útil para alumnos que capturan bien las propiedades visualmente y razonan con rapidez utilizando imágenes mentales. La representación en papel con tramas cuadriculadas facilita la observación a cualquier tipo de alumnado.

Ejemplo 2

Objetivos:

- Explorar y seguir un procedimiento de construir mosaicos
- Detectar regularidades debidas a transformaciones en mosaicos
- Utilizar técnicas para comunicar figuras geométricas y configuraciones de forma precisa

Contenidos: Concepto de mosaico, reconocimiento de reflexiones, construcción de figuras transformadas

Nivel: Nos situamos en 4º de ESO. Ya se conocen las isometrías y su composición.

Recursos: Papel y tijeras, útiles de dibujo, espejos.

Al combinar estos objetivos en las tareas que siguen se pretenden poner en juego en el alumno competencias ligadas a la comunicación y argumentación además de los objetivos de tipo procedimental más habituales

Tarea 1 Construye mosaicos con papel y tijeras Coriat, Marin, Palomino, Rico (1994)

Cuando una figura se repite, según un patrón, sin dejar huecos ni producir solapamientos en una superficie tenemos un diseño geométrico llamado mosaico o teselación.

En la figura 1 aparece un trozo de mosaico; indicamos un procedimiento para construirlo con papel y tijeras.

Figura 1

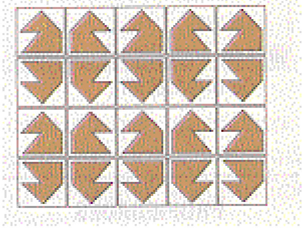


Figura 2

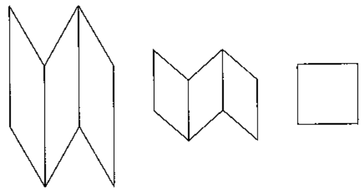


Figura 3

1) Recorta el folio hasta convertirlo en un cuadrado del mayor tamaño posible. Dobla el cuadrado en tres rectángulos dispuestos en forma de acordeón. (fig 2)

2) Pliega este rectángulo en tres partes iguales, que se superponen también en forma de acordeón hasta obtener un cuadrado. Este cuadrado es la novena parte del cuadrado inicial (fig 2)

3) Recorta en el cuadrado de papel "el caballo de ajedrez" de la figura 3, con la precaución de no llevar el corte hasta los lados del cuadrado.

4) Al deshacer todos los dobleces y extender el cuadrado inicial debe aparecer una zona del mosaico dibujado en la figura 1.

Analizamos los movimientos que se han utilizado en esta construcción:

Figura 4

a) Ya conoces que cada pliegue en el papel permite reproducir una figura simétrica cuyo eje es la línea de doblez. De esta forma, si se observa la figura 4, los "caballos" marcados con trama de puntos son simétricos con respecto al "caballo central".

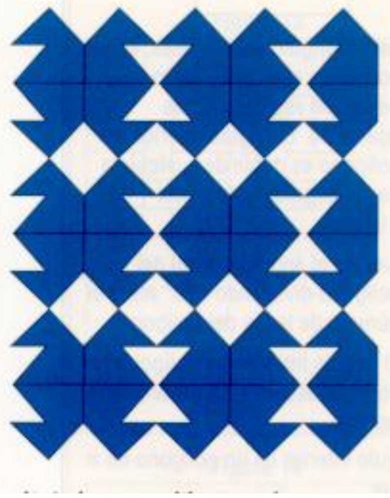
b) Localiza los cuatro ejes de simetría. ¿Qué movimientos transforman el caballo central en los cuatro caballos de los extremos del cuadrado (con trama de líneas verticales)?

c) Analiza con tus compañeros y compañeras si todos habéis encontrado los mismos movimientos para obtener los caballos de los extremos. Si no es así, busca argumentos para justificar por qué los resultados son equivalentes.

Esta experiencia enseña que con un solo motivo, "el caballo de ajedrez", y la ayuda de movimientos del plano se reproduce una zona del mosaico.

Tarea 2 ¿Cómo describir un mosaico?

Figura 5



La figura 5 muestra un mosaico sencillo. Para describir su aspecto puedes fijarte en las figuras que lo integran:

Un ejemplo de descripción:

- Hay cuadrados en hileras horizontales unidos por un vértice
- Aparecen dos triángulos isósceles unidos por un vértice situados por encima de los cuadrados en orden alterno
- A izquierda y derecha de los triángulos, se observan cuatro hexágonos cóncavos que encajan en los triángulos.

a) Realiza la experiencia de dictar esta descripción a algunos compañeros (que desconozcan la figura 5) y solicita que hagan un dibujo. Confirmarás que es imprecisa

Otra descripción que incluya figuras más grandes y que se repitan puede ser menos confusa.

Segunda descripción:

- Hay una hilera horizontal de hexágonos con un lado en común.
- Otra hilera horizontal de hexágonos iguales, se solapa con la hilera anterior (en cada vértice) hasta formar un cuadrado.
- Los huecos que dejan los hexágonos de las dos hileras son cuadrados
- En el interior de cada hexágono hay cuatro caballos de ajedrez unidos dos a dos por sus pies y su espalda.

b) Analiza las imprecisiones de esta descripción y redacta otra que consideres más adecuada; dicta a tus amigos las tres descripciones y solicítales que dibujen el mosaico sin conocerlo.
Los mosaicos presentan en su diseño ciertas regularidades o patrones. El procedimiento de construcción da las pistas para obtenerlo: partimos de una pequeña zona del plano y, por composición de movimientos se recubre la superficie.
Si se desconocen estas pautas de construcción y se muestra el mosaico ya diseñado, las nuevas formas o enlaces entre figuras desdibujan el motivo inicial y lo esconden en la trama de formas nuevas que se repiten.

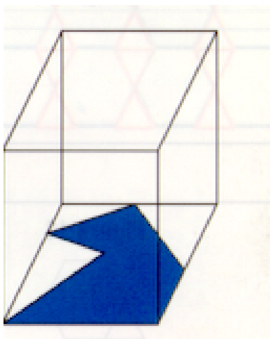


Figura 6

c) Si dispones de cuatro espejos pequeños forma con ellos las caras laterales de una caja ortoédrica (con el espejo hacia el interior) (figura 6) y coloca en su base el dibujo del caballo suficientemente ampliado para que ocupe toda la base. Mira en el interior de la caja. El mosaico se extiende indefinidamente en el juego de imágenes por simetría que permite este calidoscopio. Reproduce las imágenes que observas sobre una trama cuadrada de puntos.

Tarea 3 Exploración

Es posible reproducir la figura 5 buscando una zona que, al trasladarla recubra el resto de la superficie. En este mosaico la zona puede ser un cuadrado ¿con qué región cuadrada del mosaico se puede reproduce completamente usando solo traslaciones?

Actividad En la sección 4 del capítulo se enunció el desarrollo curricular y un mapa conceptual de contenidos relativo a la simetría; también se han esbozado descripciones de capacidades en otra actividad. Utilizando como base estas informaciones analiza los tres grupos de tareas que se indican en el Ejemplo 2

1) sobre caracterización de simetrías (Tarea 1)
2) sobre composición de simetrías (Tarea 2)
3) sobre construcción y descripción de mosaicos. (Tarea 3)

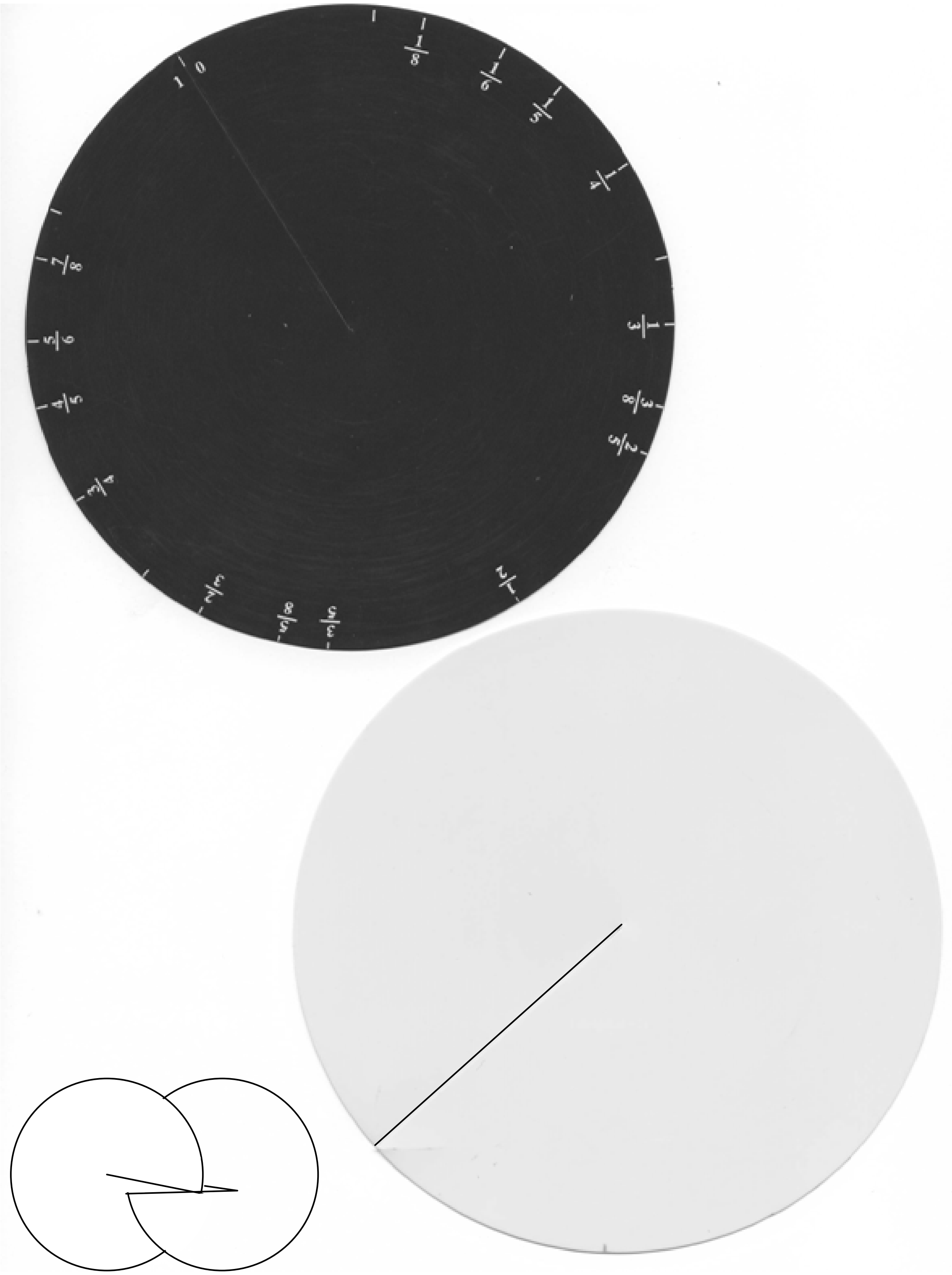
Para efectuar el análisis de estas tareas puede ayudarte el siguiente esquema:

a) Descripción de los contenidos y capacidades que se intentan desarrollar en ellas.
b) Complejidad de las tareas que se proponen al alumno.
c) Criterios que se han manejado para hacer la secuencia de actividades que componen cada tarea. (Utilización de la información sobre errores, uso de las fases de aprendizaje que sugiere el matrimonio Van Hiele, incorporación de tareas exploratorias o desarrollo de nuevos conceptos, etc.).
d) Opinión personal sobre la estructura de este tipo de tareas y sus ventajas o inconvenientes para utilizarlas en clase.

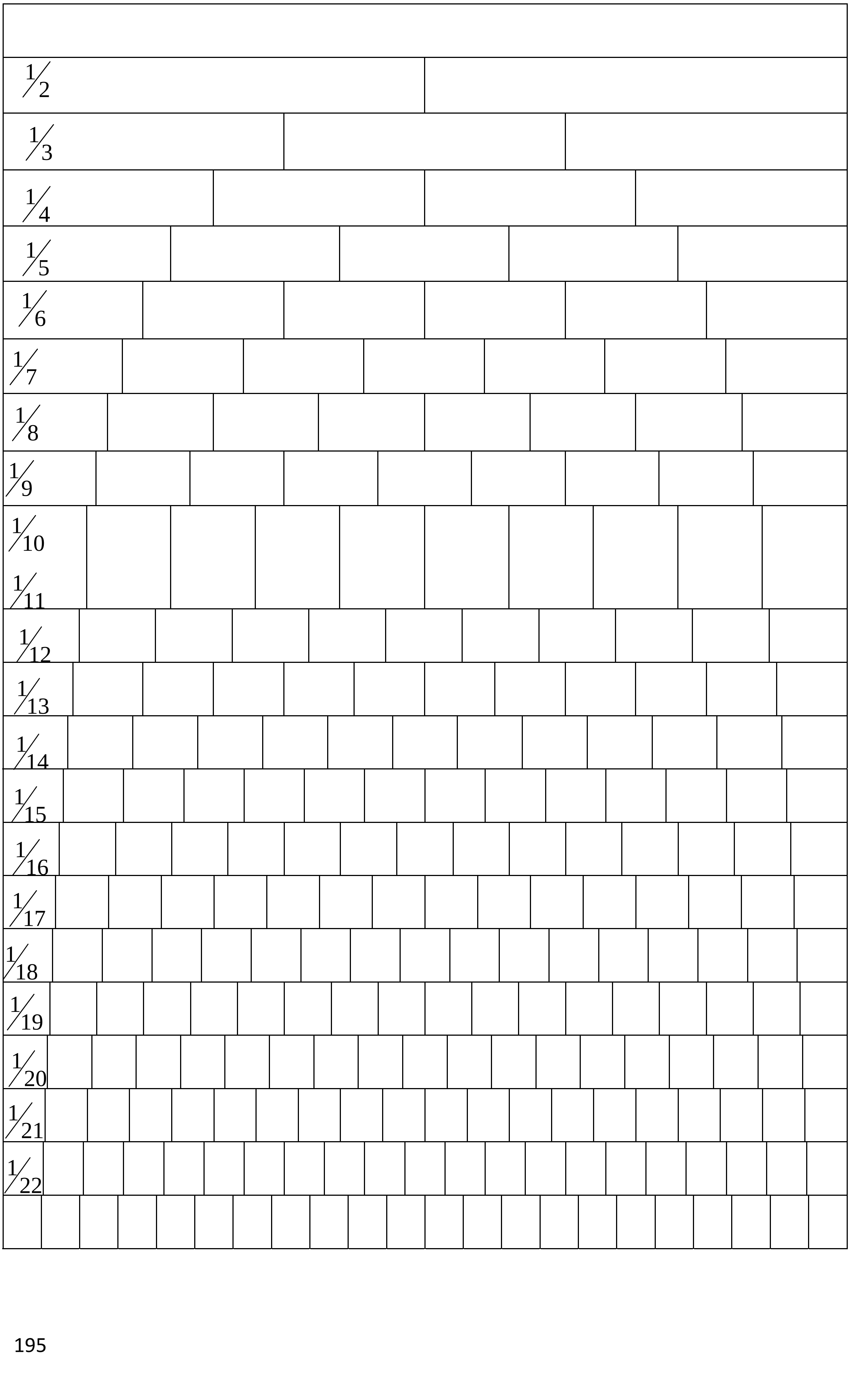
ANEXOS:

ANEXO A:

ANEXO A.1: Círculo de Fracciones:

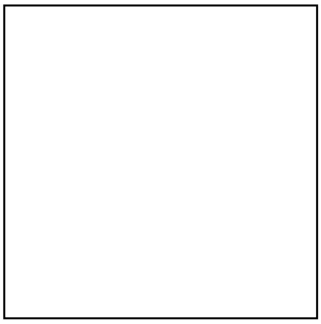


Anexo A.2: Muro de Fracciones

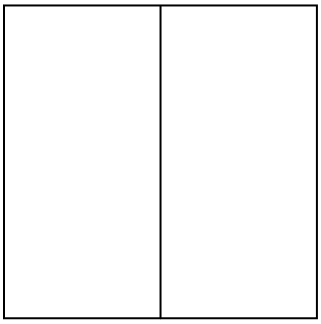


Anexo A.3: Transparencias de cuadrados

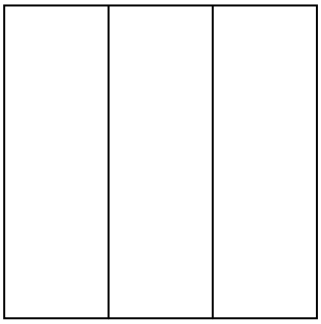
$\frac{1}{1}$



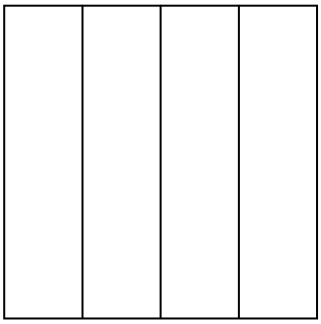
$\frac{1}{2}$



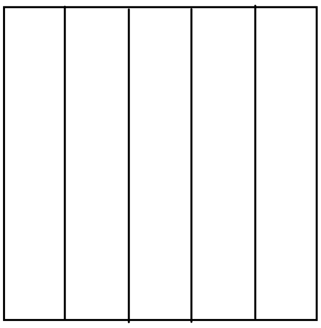
$\frac{1}{3}$



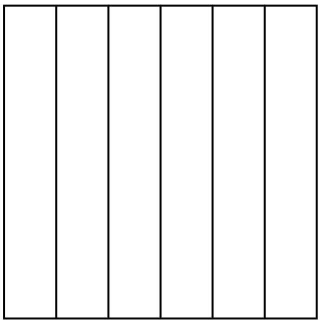
$\frac{1}{4}$



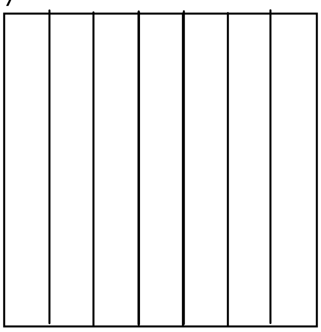
$\frac{1}{5}$



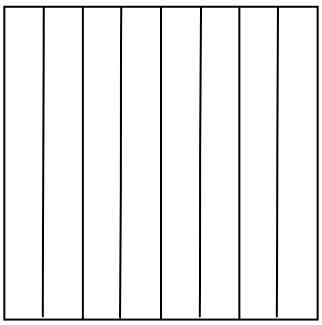
$\frac{1}{6}$



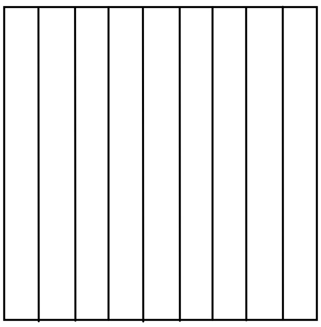
$\frac{1}{7}$



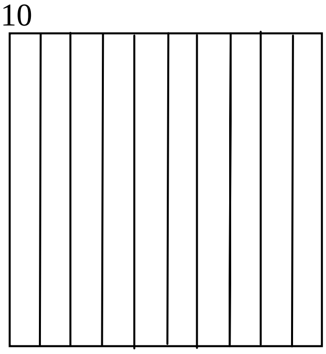
$\frac{1}{8}$



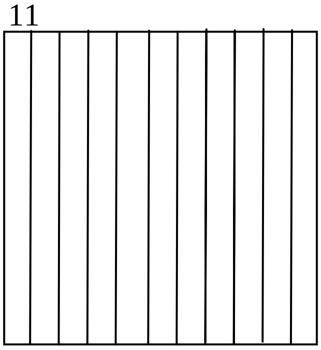
$\frac{1}{9}$



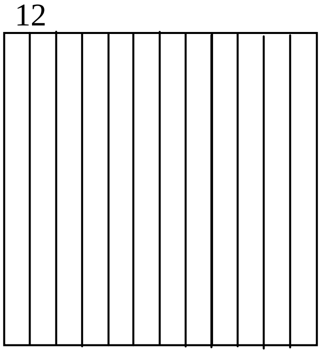
$\frac{1}{10}$



$\frac{1}{11}$



$\frac{1}{12}$



ANEXO B Anexo B.1: Propuesta de Senechal para estructurar los temas distinguiendo niveles de competencia (Steen,1998).

Estructura para las formas

Identificación y clasificación

ELEMENTAL:	INTERMEDIO:	AVANZADO:
Círculos	Esferas	Superficies
Polígonos planos	Polígonos en zig-zag y estrellados	Hélices, espirales, cilindros, toros, bandas de Mobius
Poliedros	Poliedros	Poliedros
Rompecabezas	Adoquinado del plano con polígonos	Mosaicos tipo Escher
	Redes	Estructuras de cristales simples
Congruencia; semejanza		
Burbujas de jabón	Agrupaciones de burbujas de jabón	Orientación, textura de género

Análisis

ELEMENTAL:	INTERMEDIO:	AVANZADO:
Simetría especular; simetría rotacional	Calidoscopios de dos espejos	Calidoscopios poliédricos
Congruencia	Simetría de figuras finitas	Simetría como principio organizativo; geometría de transformaciones
Doblado de papel; patrones	Disección; rompecabezas	
Semejanza	Rep-tiles; fractales	Exploración de fractales
	Patrones naturales	Escala en biología
Construcción y desarmado de poliedros	Poliedros regulares y semirregulares	Fórmula de Euler para poliedros
Medición lineal/volumen	Medición de ángulos	Fundamentos de la geometría plana y de tres dimensiones
Fabricación de edredones y mosaicos	Adoquinado del plano con polígonos	Retículas; teoría elemental de los mosaicos

Representación y visualización

ELEMENTAL:	INTERMEDIO:	AVANZADO:
Construcción de modelos	Construcción de modelos	Construcción de modelos
Dibujo, lectura y uso de mapas simples	Mapas de relieve y curvas de nivel	Secciones transversales de estructuras de formas tridimensionales
	El globo	Geometría de la esfera; proyecciones; mapas
Sombras	Geometría de sombras	Imágenes y reconstrucción de imágenes; figuras imposibles
Dibujo	Dibujo en perspectiva	Dibujo técnico; estereoscopios
Proyectores a escala	Telescopio y microscopio	Geometría de las lentes; la cámara fotográfica
	Coordenadas en el plano	Coordenadas tridimensionales
Geometría de la tortuga	Exploración de la geometría con la computadora	Más gráficas de computadora

FIGURA 30. Organización de los temas relacionados con la forma que proporciona estructura y coherencia a lo que de otro modo aparecería como una colección arbitraria de temas muy diferentes.

Anexo B.2: UNA UNIDAD DIDÁCTICA SOBRE LA NORMA DIN 476.

Eloy Domínguez Izquierdo, octubre/noviembre de 2005

Se encuadra en 2º de Bachillerato LOGSE, modalidad Arte y ha formado parte de mi actividad docente durante los dos cursos (2003/2004 y 2004/2005) de existencia de la extinguida asignatura optativa Matemáticas de la Forma.

Es necesario tener presente que la norma DIN 476 regula el tamaño del papel de oficina y se basa en las tres reglas siguientes:

A. Todos los formatos son semejantes (esto facilita el encuadre al cambiar la escala).

B. Cada formato se obtiene a partir del superior inmediato, dividiéndolo a través del eje menor.

C. El formato máximo A0 tiene un metro cuadrado de área.

A partir de estos tres postulados, el lector podrá demostrar tres teoremas:

1. Cada formato tiene la mitad de área que el inmediato superior (se usa el axioma B).
2. El cociente entre las longitudes del lado mayor y del lado menor es, para todos los formatos, la raíz cuadrada de dos (se usan los axiomas A y B).
3. Las medidas de A0 son 841 y 1189 milímetros (se usan el axioma C y el teorema 2).

Usando el axioma B y el teorema 3, se pueden obtener las medidas redondeadas de los restantes formatos:

A1: 594 × 841 mm.

A2: 420 × 594 mm.

A3: 297 × 420 mm. (pliego)

A4: 210 × 297 mm. (folio)

A5: 148 × 210 mm. (cuartilla)

A6: 105 × 148 mm. (octavilla), etc., etc.

El planteamiento de la unidad didáctica sigue justamente el camino contrario al enfoque anterior, que es totalmente axiomático. Se parte de un papel A4 y, de manera totalmente experimental y manipulativa, se realiza la siguiente puesta en escena:

1) plegando el papel de manera que el lado menor se superponga al lado mayor, queda marcada la diagonal del cuadrado correspondiente al lado menor

2) usando al teorema de Pitágoras, se deduce que la longitud de la citada diagonal es igual a la longitud del lado menor del folio multiplicada por la raíz cuadrada de 2

3) plegando por segunda vez, se consigue que la citada diagonal se superponga con el lado mayor, con lo que queda claro que la longitud del lado mayor es igual a la longitud del lado menor multiplicada por la raíz cuadrada de 2

4) usando un nuevo papel A4, se pliega por el eje menor para obtener una cuartilla A5 (en realidad son dos cuartillas, pero una tapa a la otra)

5) superponiendo adecuadamente la cuartilla a un nuevo A4, se constata que un lado de A4 coincide con uno de A5 y que el otro es la mitad (con lo que el área de A5 es la mitad del área de A4)

6) se repiten los pasos 1 al 5 con una cuartilla A5, poniendo de relieve que las peculiaridades de A4 también las posee A5

7) se explica que el proceso anterior es repetible con todos los formatos, bastando con hacerlo parcialmente con A6 (o ni siquiera eso)

8) se redacta por escrito un test de reconocimiento de formato DIN 476; para saber si un papel rectangular sigue la norma DIN 476, se marca la diagonal del cuadrado y se compara con el lado mayor por superposición.

OPCIONES DE METODOLOGÍA.

A lo largo de la anterior unidad didáctica hemos podido constatar que unos mismos hechos geométricos pueden ser conducidos, a la hora de darlos a conocer, de dos enfoques que son metodológicamente opuestos:

1. <u>El modelo axiomático–deductivo</u>: partimos de tres axiomas plausibles (justificados por las necesidades del usuario del papel de oficina y por las ventajas de moverse dentro del sistema métrico decimal) y vamos obteniendo teoremas y conclusiones mediante reglas válidas de inferencia.

2. El modelo empírico–constructivo: partimos de un material manipulable y fácil de conseguir, y mediante una puesta en escena cuidadosamente planificada, vamos provocando el descubrimiento empírico y gradual de hechos geométricos relevantes.

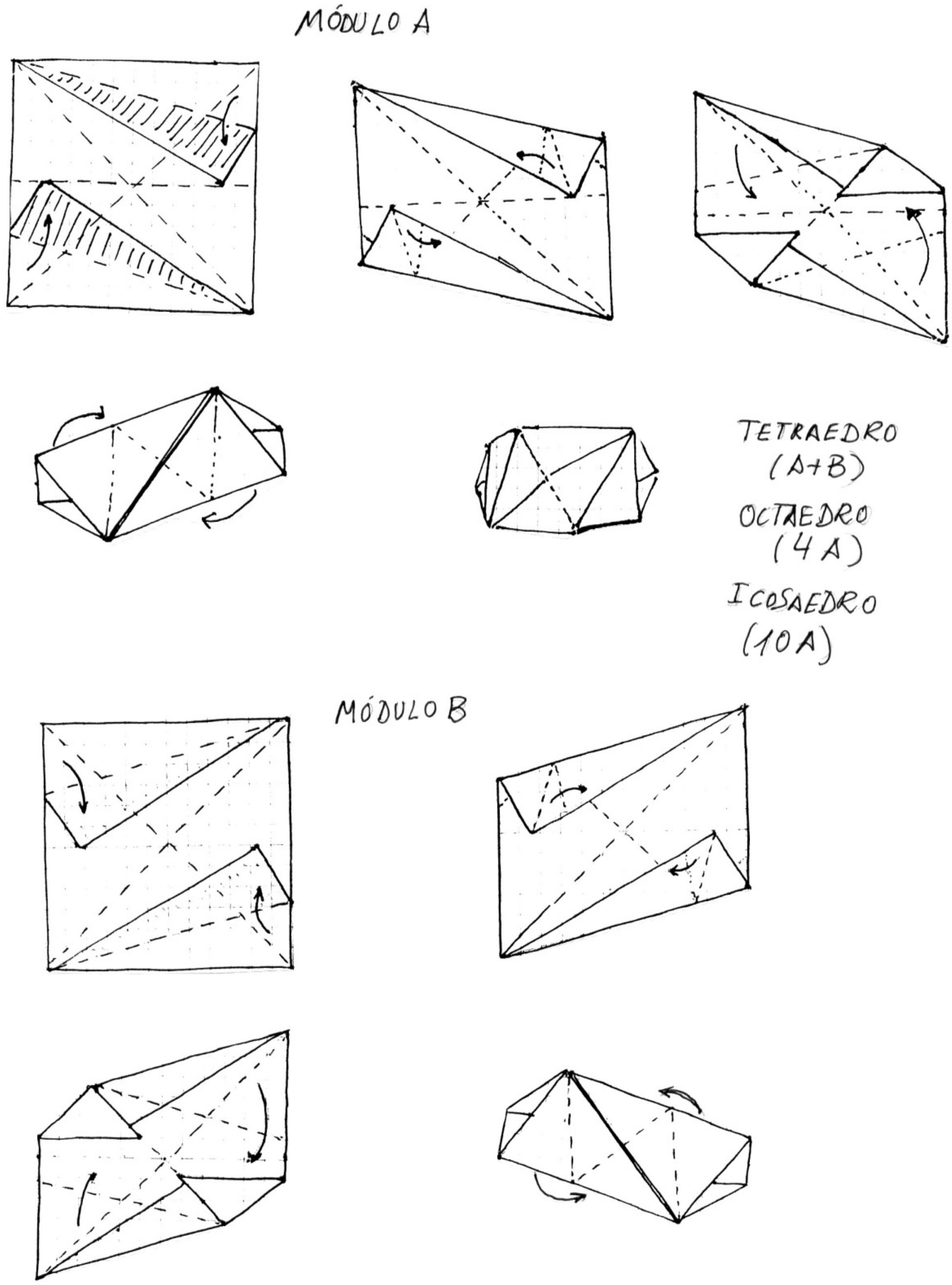
Si queremos analizar con más detalle los aspectos que diferencian a uno y otro paradigma de actuación docente, podríamos hacer uso del siguiente esquema de análisis de rasgos:

a) El modelo 1 entra dentro del campo de la geometría deductiva y razonada, mientras que el modelo 2 se mueve fundamentalmente en el terreno de la geometría manipulativa y empírica.

b) El modelo 1 carga todo su contenido en las habilidades deductivas y de razonamiento, mientras que el modelo 2 analiza constructivamente situaciones similares (como son la de A4 con relación a A5 y la de A5 con respecto a A6) para embarcarse en un proceso de abstracción que pone de relieve propiedades comunes a todos los formatos DIN 476.

c) El modelo 1 se basa en la descripción de un paradigma global (todos los formatos siguen unas mismas reglas establecidas de antemano), mientras que el modelo 2 se dedica a inspeccionar paradigmas concretos (los formatos A4, A5 y A6 por turno) cuyos rasgos comunes quedan puestos de relieve.

Anexo B.3: Tetraedro.



Anexo B.4: Matemáticas en la Plaza: Teorema de Pitágoras Hexagonal

AUTOR: Grupo LaX. Luis Berenguer y otros. Maestro Educación Secundaria I.E.S. Américo Castro. Huétor Tájar (Granada)

PALABRAS CLAVE:

Divulgación matemática. Geometría. Teorema de Pitágoras. Manipulativos.

¿QUE SE PRETENDE MOSTRAR?:

Euclides, en el Libro I de los Elementos, proposición 47, demuestra el Teorema de Pitágoras: En los triángulos rectángulos, el cuadrado sobre el ángulo opuesto al ángulo recto es equivalente a los cuadrados sobre los lados que formaron el ángulo recto.

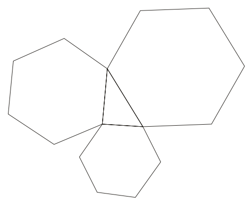
Generalizar el Teorema de Pitágoras.

Comprobar que la superficie del hexágono construido sobre un cateto, más la superficie del hexágono construido sobre el otro cateto, es equivalente a la superficie del hexágono construido sobre la hipotenusa.

DIRIGIDO A: Personas mayores de 12 años.

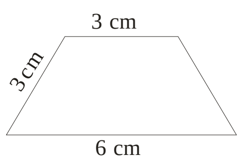
MATERIALES NECESARIOS:

Tablero en el que hay dibujado un triángulo rectángulo y sobre los catetos y la hipotenusa sendos hexágonos.



DESCRIPCIÓN CLARA DEL EXPERIMENTO:

El puzzle está formado por 100 trapecios isósceles cuyas medidas son:



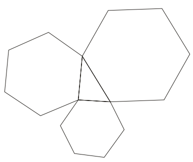
Hay 18 trapecios coloreados de un color, 32 de otro, y los restantes 50 de otro color diferente.

Los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo dibujado en el tablero miden 3, 4 y 5 unidades respectivamente, tomando como unidad la base menor del trapecio.

Si lo convertimos en cm, los catetos miden 9 y 12 cm y la hipotenusa 15 cm.

En el tablero hay escritas las siguientes instrucciones:

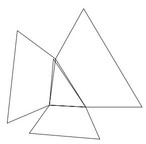
Con 18 piezas del rompecabezas, construye un hexágono regular cuyo lado sea el cateto menor del triángulo rectángulo que se acompaña.



Con las 32 restantes, construye otro hexágono regular, cuyo lado sea la medida del cateto mayor.

Con las 50 piezas, construye un hexágono regular cuyo lado sea la medida de la hipotenusa. Comprueba que el área del hexágono construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo, es equivalente a la suma de las áreas de los otros dos hexágonos.

Ayuda: Para construir los hexágonos, puedes seguir la progresión del margen.



Comprueba que la suma de las áreas de los trapecios isósceles construidos sobre los catetos es igual al área del trapecio isósceles construido sobre la hipotenusa, siempre y cuando las figuras sean semejantes.

Y con cualquier trío de figuras semejantes construidas sobre los catetos y la hipotenusa, ¿se cumple el Teorema de Pitágoras? Con las piezas del rompecabezas, puedes comprobarlo.

OBSERVACIONES Y SUGERENCIAS

El motivo de que sean 18 y 32 trapecios los utilizados para formar los hexágonos de los catetos se debe a que son los números enteros más adecuados para formar después el hexágono de la hipotenusa, ya que si utilizamos los siguientes (32 y 50), las figuras serían demasiado grandes.

Anexo B.5: Libros juveniles

Andradas, C. (2000). *Póngame un kilo de matemáticas. El misterio del cuadrado mágico*. Madrid, SM (125 p.)

Carroll, L. (2002). *Un cuento enmarañado.* Madrid, Nívola. (180 p.)

Enzensberger, H.M. (1997). *El diablo de los números*. Madrid, Siruela, (255 p.)

Frabetti, C. (2000). *El gran juego*. Madrid, Alfaguara Juvenil. (130 p.)

Frabetti, C. (2000). *Malditas matemáticas. Alicia en el país de los números*. Madrid, Alfaguara Juvenil. (130 p.)

Gómez, R. (2000). *El mundo secreto de los números. Aventura en el castillo numeral*. Madrid, SM (125 p.)

Gómez, R. (2000). *La Ciencia en un periquete. Días de viento en el jardín de Woolsthorpe*. Madrid, SM (125 p.)

Gómez, R. (2000). *La Selva de los números*. Madrid, Alfaguara Juvenil. (116 p.)

Guzmán, M. de (1984). *Cuentos con cuentas*. Barcelona, Labor. (122 p.)

Mataix, S. (2002). *Lee a Julio Verne. El amor en tiempos de criptografía*. Barcelona, Rubes. (156 pp.)

Mataix, S. (2002). *Matemáticas tiene nombre de mujer*. Barcelona, Rubes. (156 pp.)

Millás, J.J. y Forges, A. (2001). *Números pares, impares e idiotas.* Barcelona, Alba Editorial (241 pp.)

Molina, M.I. (2000). *El señor del Cero*. Madrid, Alfaguara Juvenil. (150 p.)

Muñoz, J. (2003). *Ernesto el aprendiz de mago*. Madrid, Nívola. (153 p.)

Roig, P. y Font, J. (1997). *Apín capón zapún amanicano (1134)*. Barcelona, Octaedro. (76 p.)

Poskill, K. (2000). *Esas endiabladas mates*. Barcelona, Molino.

Poskill, K. (2006). *Esas mortíferas mates*. Barcelona, Molino.

Roldán, I. (2002). *Teatromático*. Madrid, Nívola.

Serrano, E. (2002). *¡Ojalá no hubiera números!* Madrid, Nívola. (60 p.)

Tahan, M. (1972). *El hombre que calculaba*. Barcelona, Aedo. (227, p.).

Teixidor, Emili (2003). *El crimen de la Hipotenusa.* Barcelona, Planeta. (134 p.)

Anexo B. 6: Libros de narrativa para adultos, relacionados con la matemática

Alder, K. (2003). *La medida de todas las cosas*. Madrid, Antillana. (495 p.)

Arce, J.C. (2000). *El matemático del rey*. Barcelona, Planeta. (225 p.)

Azuela (1995). *El matemático*. México.

Carlavilla, J.L. y Fernández, G. (2003). *Historia de las matemáticas*. Granada, Proyecto Sur. (350 p.)

Carroll, L. (1999). *Alicia Anotada*. Edición de Martin Gardner. Ed. Akal, Madrid. (327 p.)

Doxiadis, A. (2000). *El tío Petros y la conjetura de Goldbach*. Barcelona, Tiempos modernos. (200 p.)

Frabetti, C. (2000). *El libro infierno*. Madrid, Alfaguara. (130 p.)

Guedj, D. (2000). *El teorema del loro*. Barcelona, Anagrama. (535 p.)

Guedj, D. (2000). *La medida del mundo*. Barcelona, Ediciones Península. (350 p.)

Hofman, P. (2000). *El hombre que sólo amaba los números.* Barcelona, Granica. (290 p.)

Mosterín, J. (2000). *Los lógicos*. Madrid, Espasa – Forum. (325 p.)

Petit, J.P. (1980). *Le géométricon*. Paris, Belin. (63 p.)

Petit, J.P. (1980). *Le topologicom*. Paris, Belin. (63 p.)

Petit, J.P. (1980). *L'informagique*. Paris, Belin. (63 p.)

Stewart, I. (1994). *Les fractals*. Paris, Belin. (70 p.)

Stewart, I. (1994). *Oh! Catastrophe*. Paris, Belin. (70 p.)

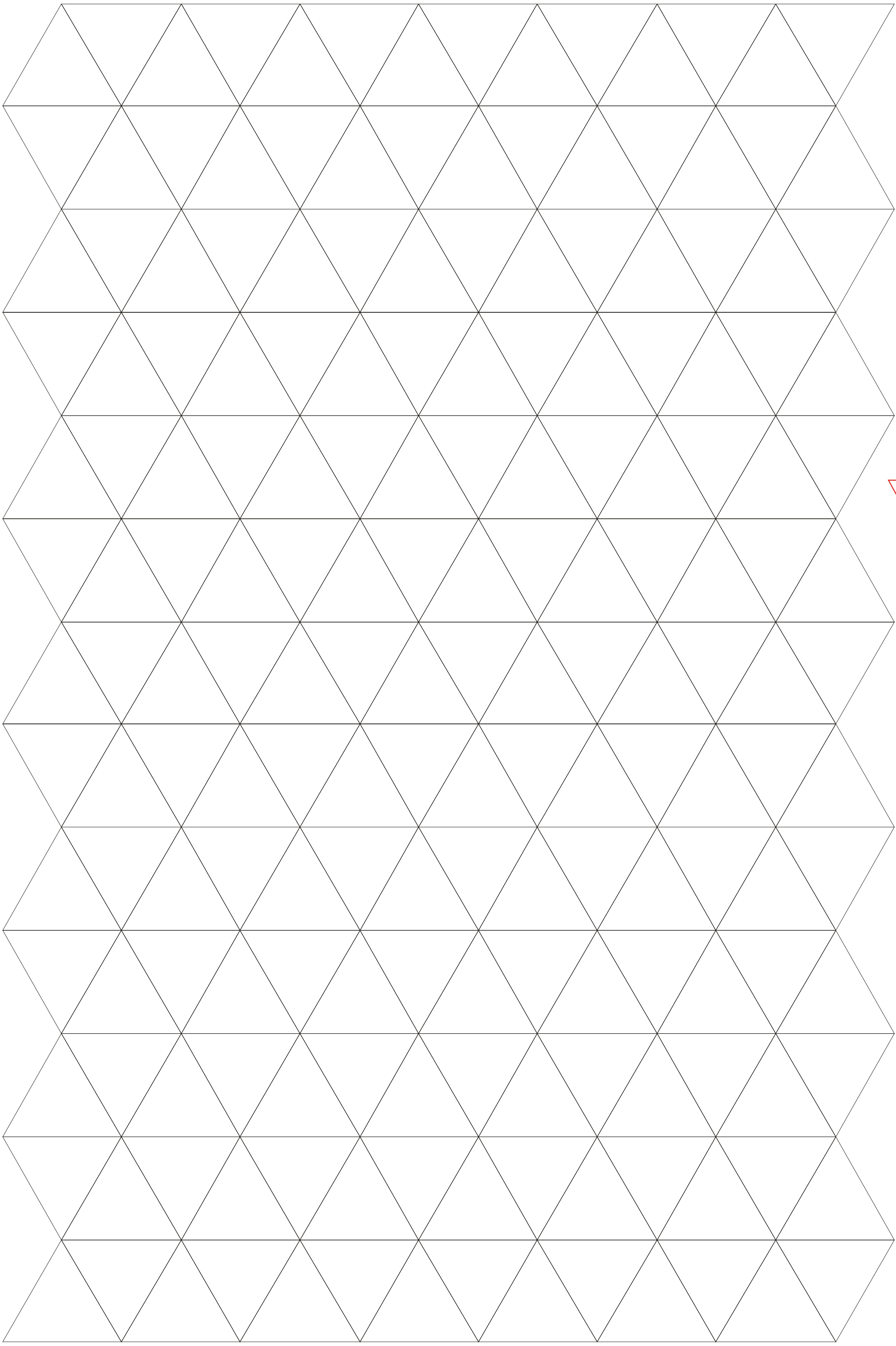
Stewart, I. (1994). *Ah! Les beaux groupes*. Paris, Belin. (70 p.)

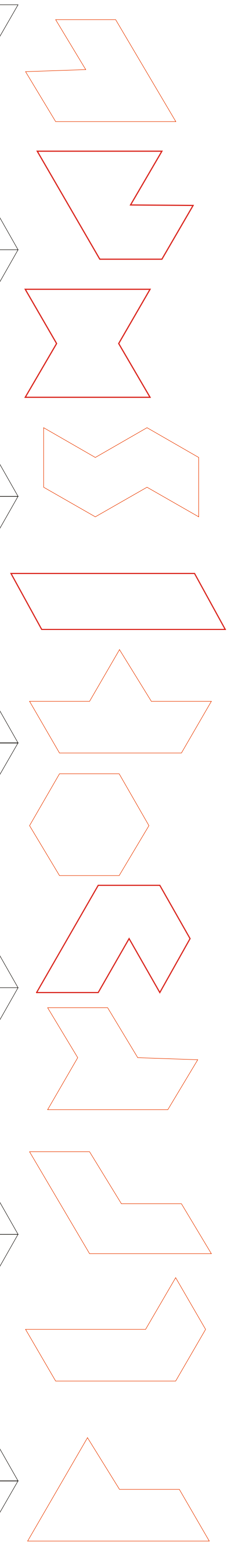
Ulam, S.M. (2002). *Aventuras de un matemático. Memorias de Stanislaw M. Ulam.* Madrid, Nívola. (315 p.)

La colección de historia de la editorial Nívola.

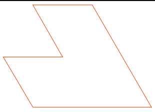
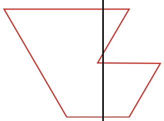
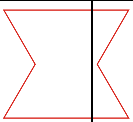
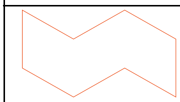
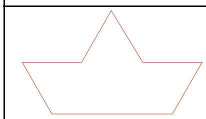
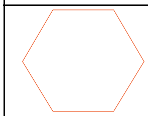
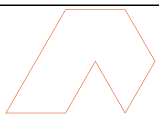
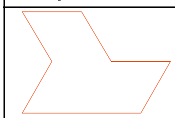
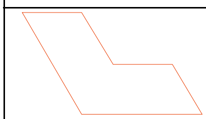
ANEXO C

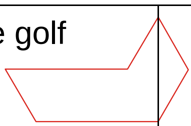
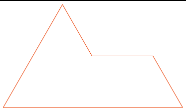
Los hexaamantes son todas las figuras que se pueden construir con seis triángulos equiláteros iguales, unidos por al menos uno de sus lados. Dibújalos en la siguiente trama





Tomando como unidad de longitud el lado del triángulo equilátero, y como unidad de superficie el área del triángulo equilátero, rellena la siguiente tabla:

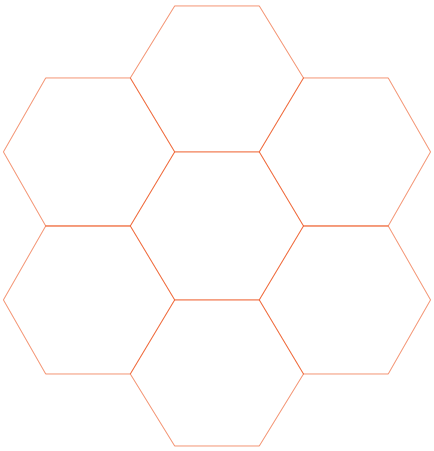
	Perímetro	Superficie	Suma ángulos interiores	Ángulos cóncavos	Ángulos convexos
 Langosta					
Yate 					
Mariposa 					
 Serpiente					
Barra 					
 Corona					
 Hexágono					
 Zapato					
 Pistola					
 Murciélago					

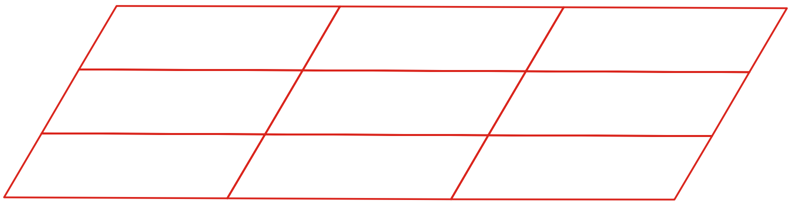
Palo de golf 					
 Esfinge					

¿Tienen todas las figuras el mismo perímetro?

¿Tienen todas las figuras la misma superficie?

Con el hexaamante en forma de hexágono podemos teselar el plano, es decir, recubrir toda la superficie sin dejar huecos ni solapamientos, investiga qué otros hexaamantes pueden teselar el plano, puedes ayudarte de la trama de triángulos. Aquí te presentamos dos ejemplos.





¿Cuántos grados suman los ángulos que están en un mismo vértice?

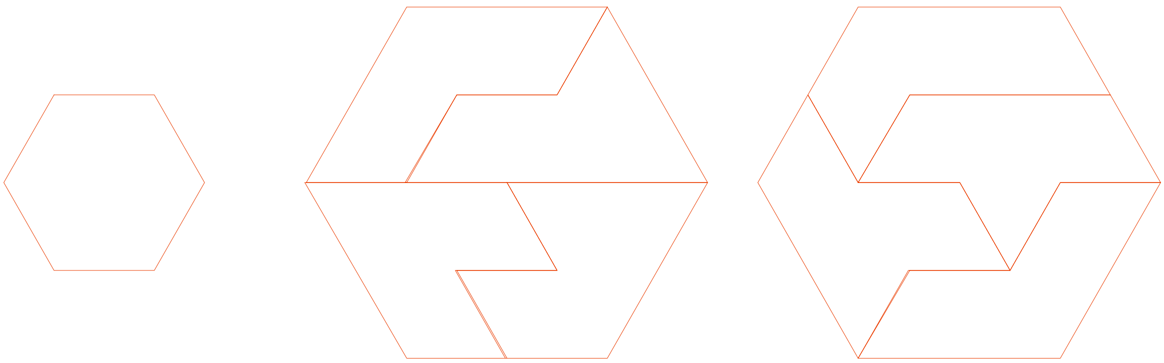
¿Qué condición deben cumplir para que la figura rellene el plano?

Construye tu propio mosaico:

Investiga juntando dos piezas diferentes y combínalas para que formen una sola pieza que rellene el plano.

No te olvides dibujarlo en la trama triangular.

Repite la actividad combinando tres hexaamantes.Todos los hexaamantes se pueden duplicar. Aquí te presentamos un ejemplo con dos soluciones.



En las hojas siguientes hemos puesto el contorno de todos los hexaamantes duplicados. Haz el puzzle de cada uno de ellos y dibuja en la trama triangular las figuras que contiene.

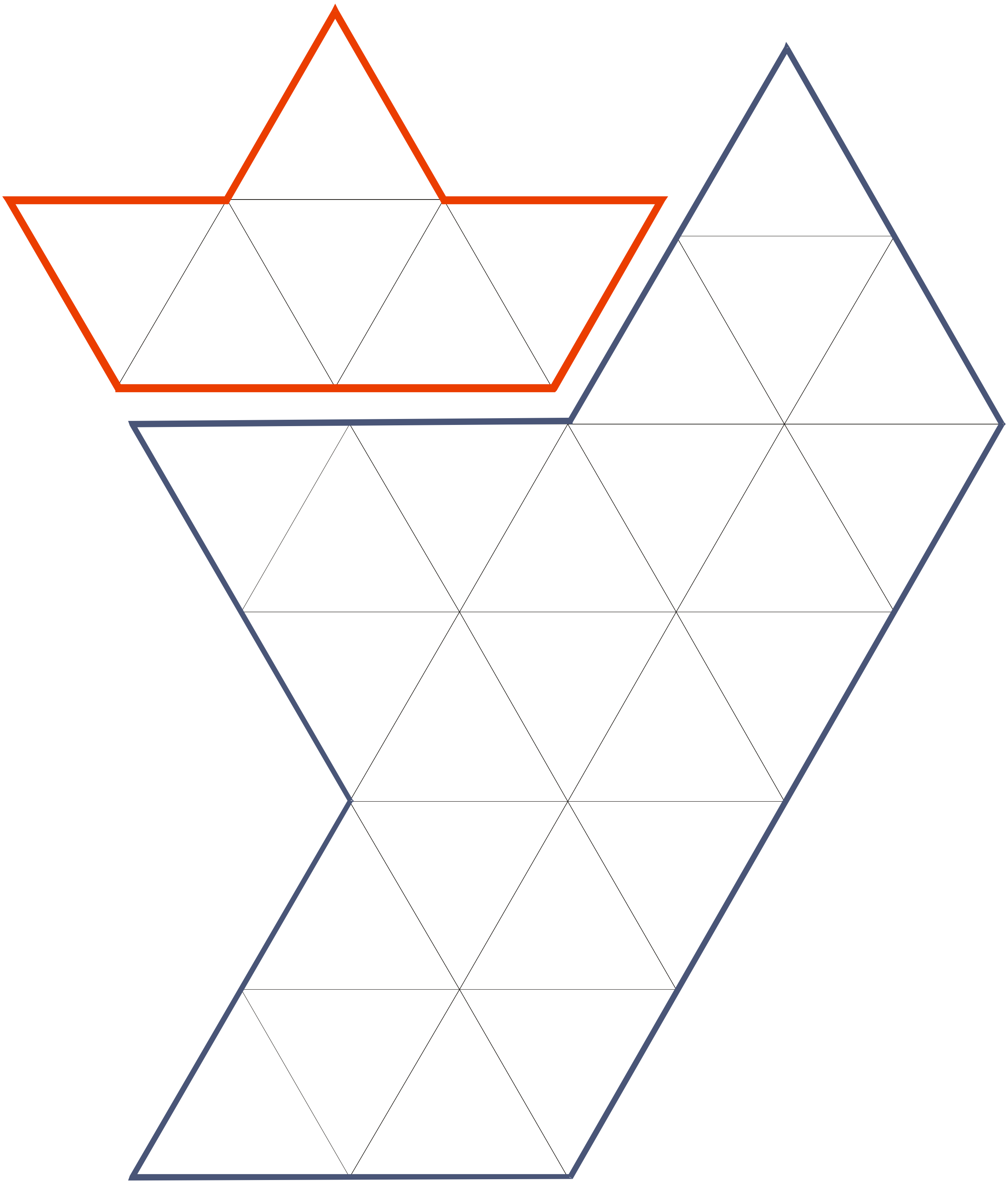
Tomando como unidad de longitud el lado del triángulo base, y como unidad de superficie el área del triángulo, rellena la siguiente tabla:

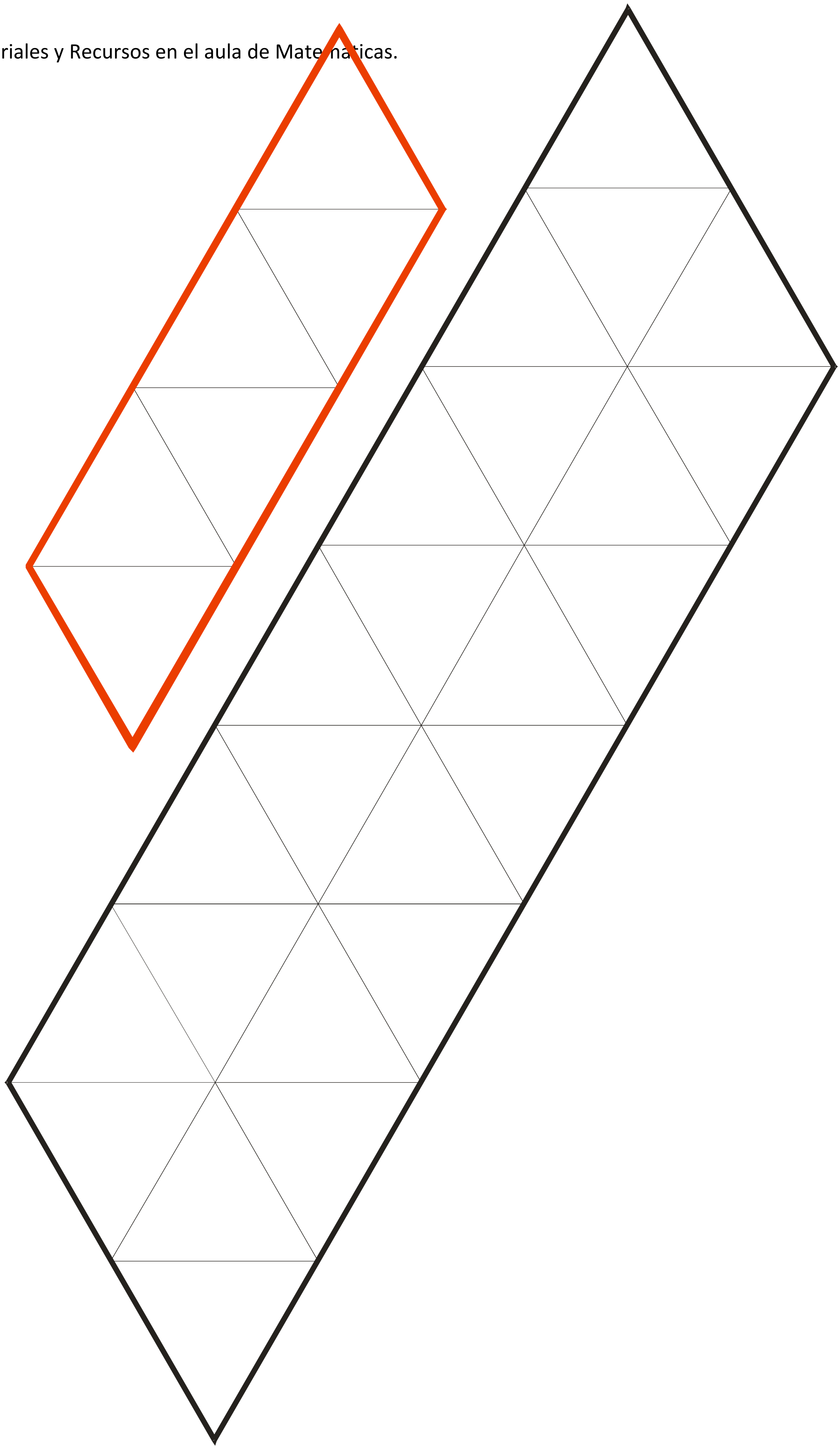
	Perímetro pequeño	Perímetro duplicad	Razón de los perímetros	Superficie pequeño	Superficie duplicado	Razón de las superficies
Langosta						
Yate						
Mariposa						
Serpiente						
Barra						
Corona						

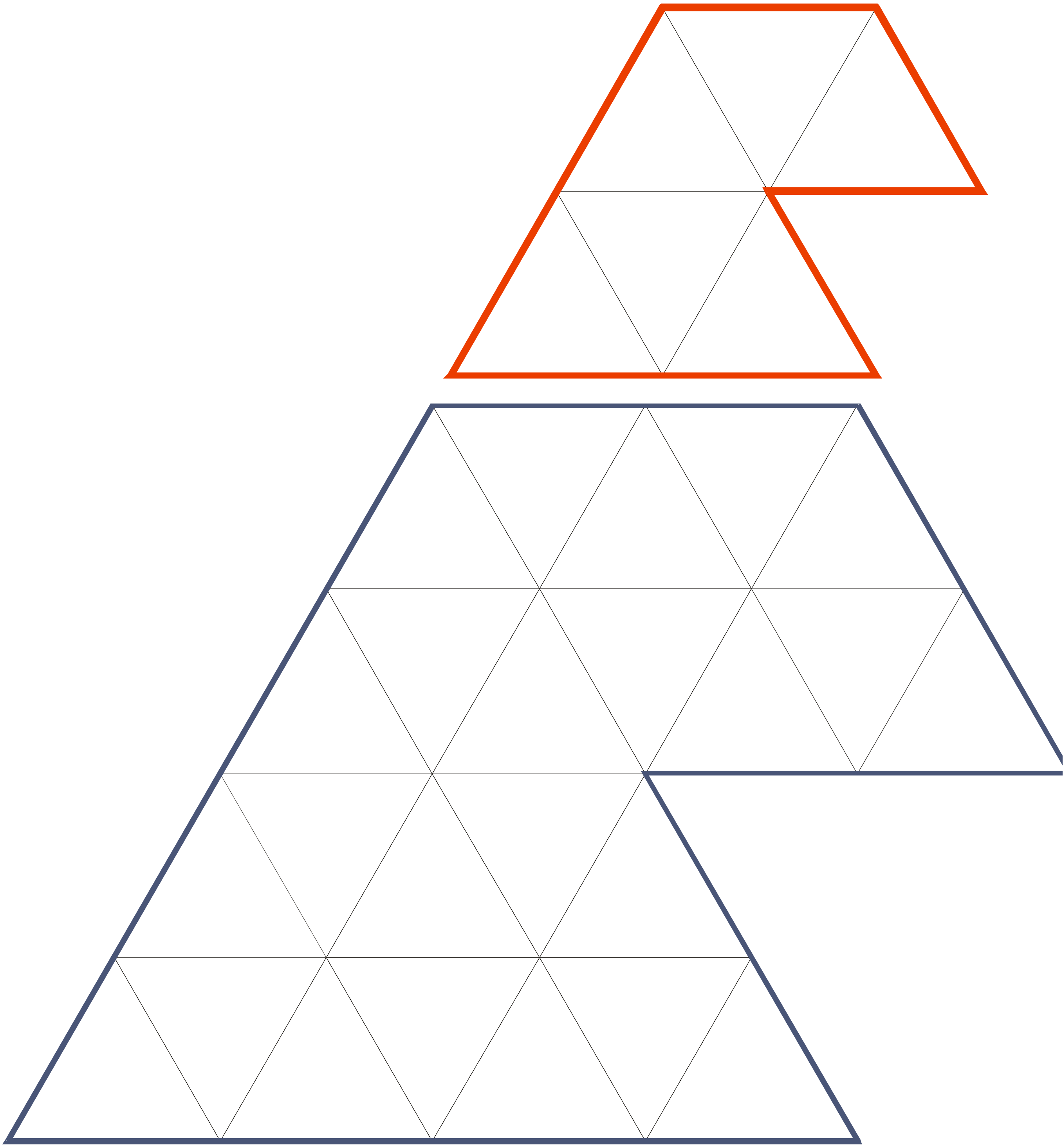
Hexágono						
Zapato						
Pistola						
Murciélago						
Palo de golf						
Esfinge						

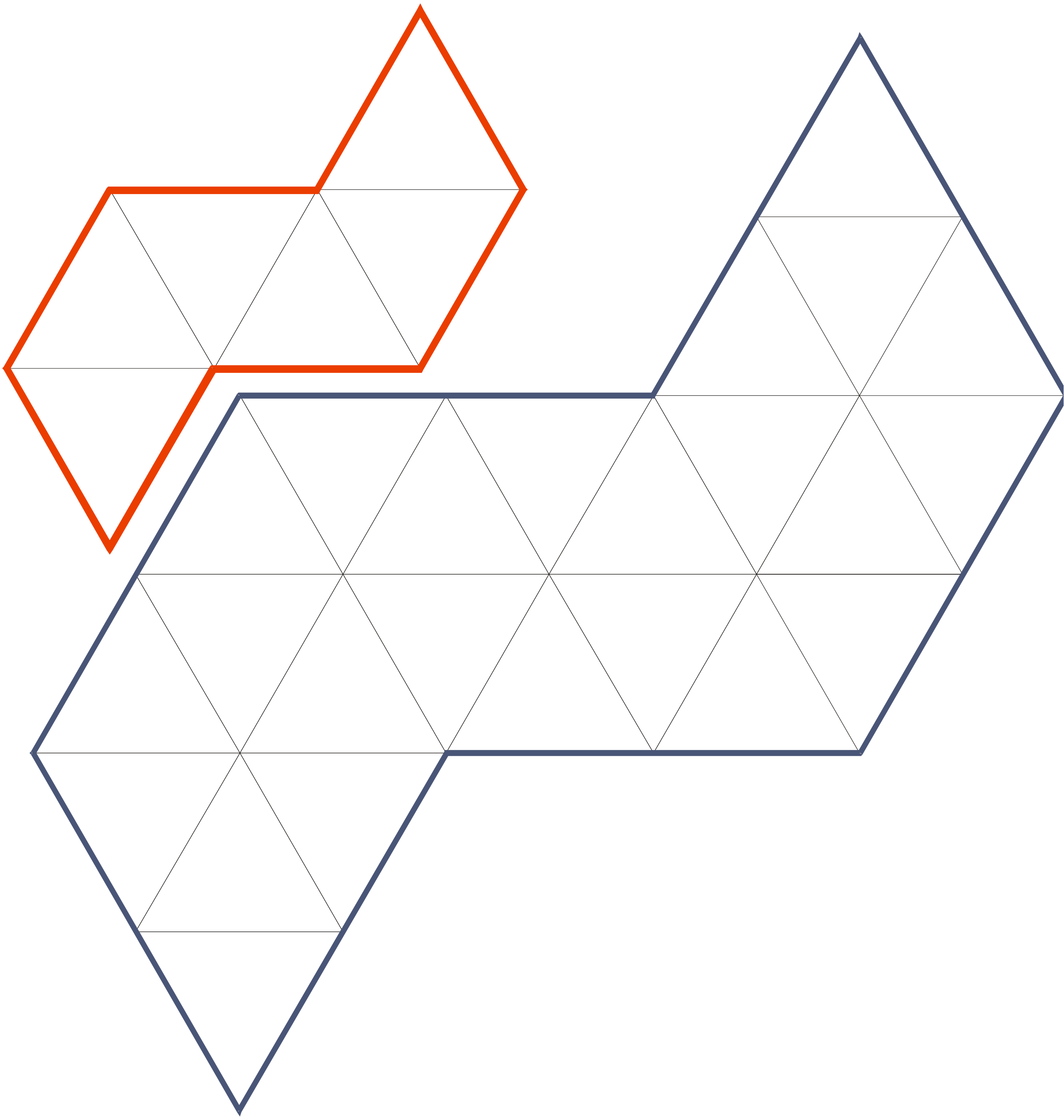
¿Cuál es la razón de semejanza?

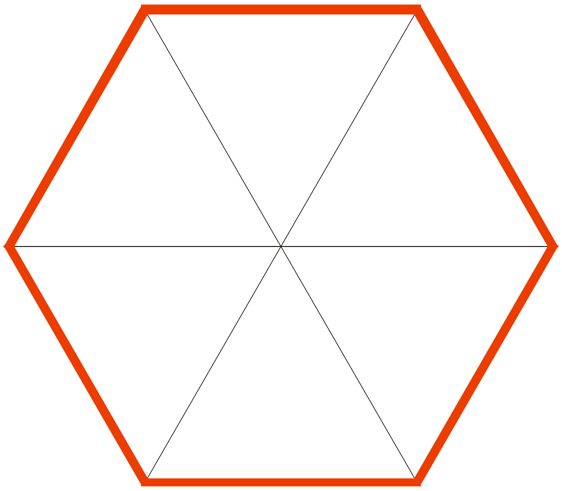
¿Encuentras alguna relación entre la razón de semejanza y la razón de las superficies?

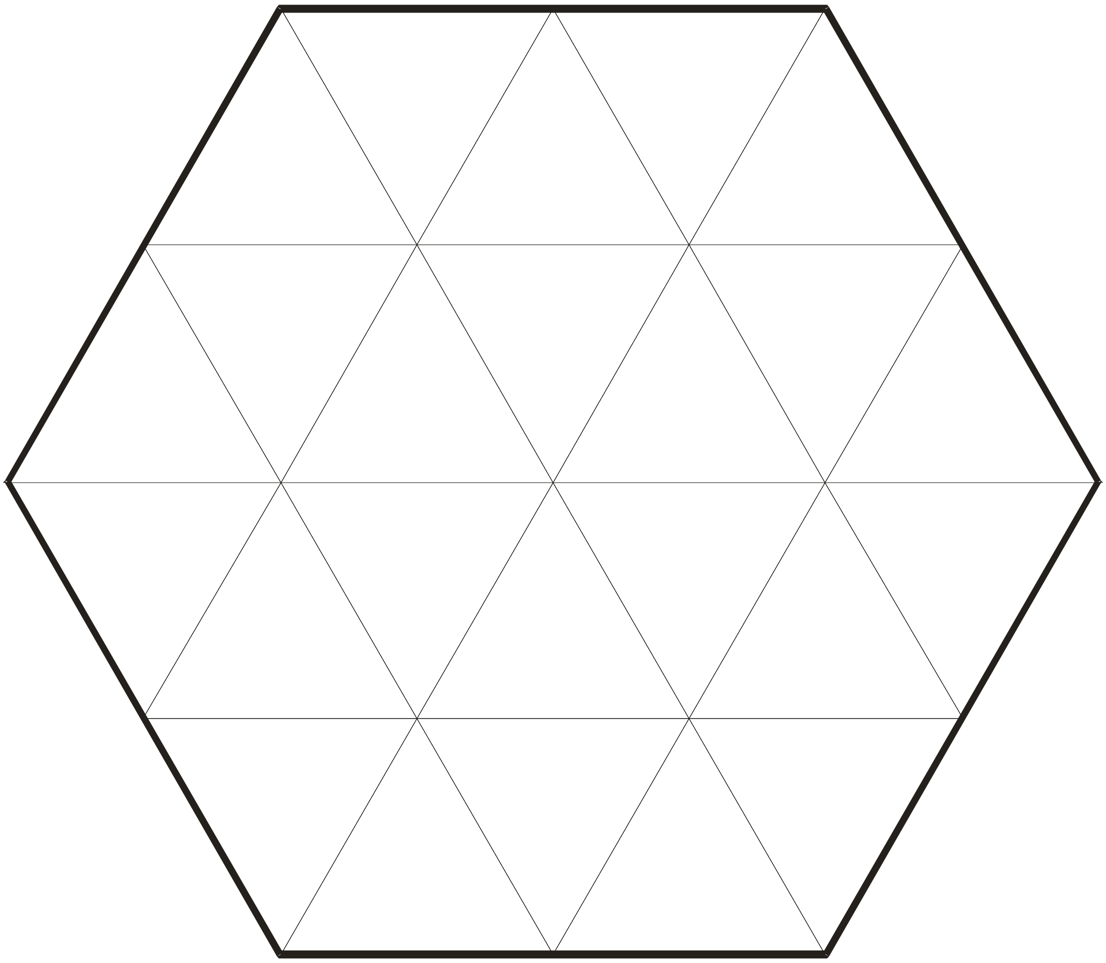


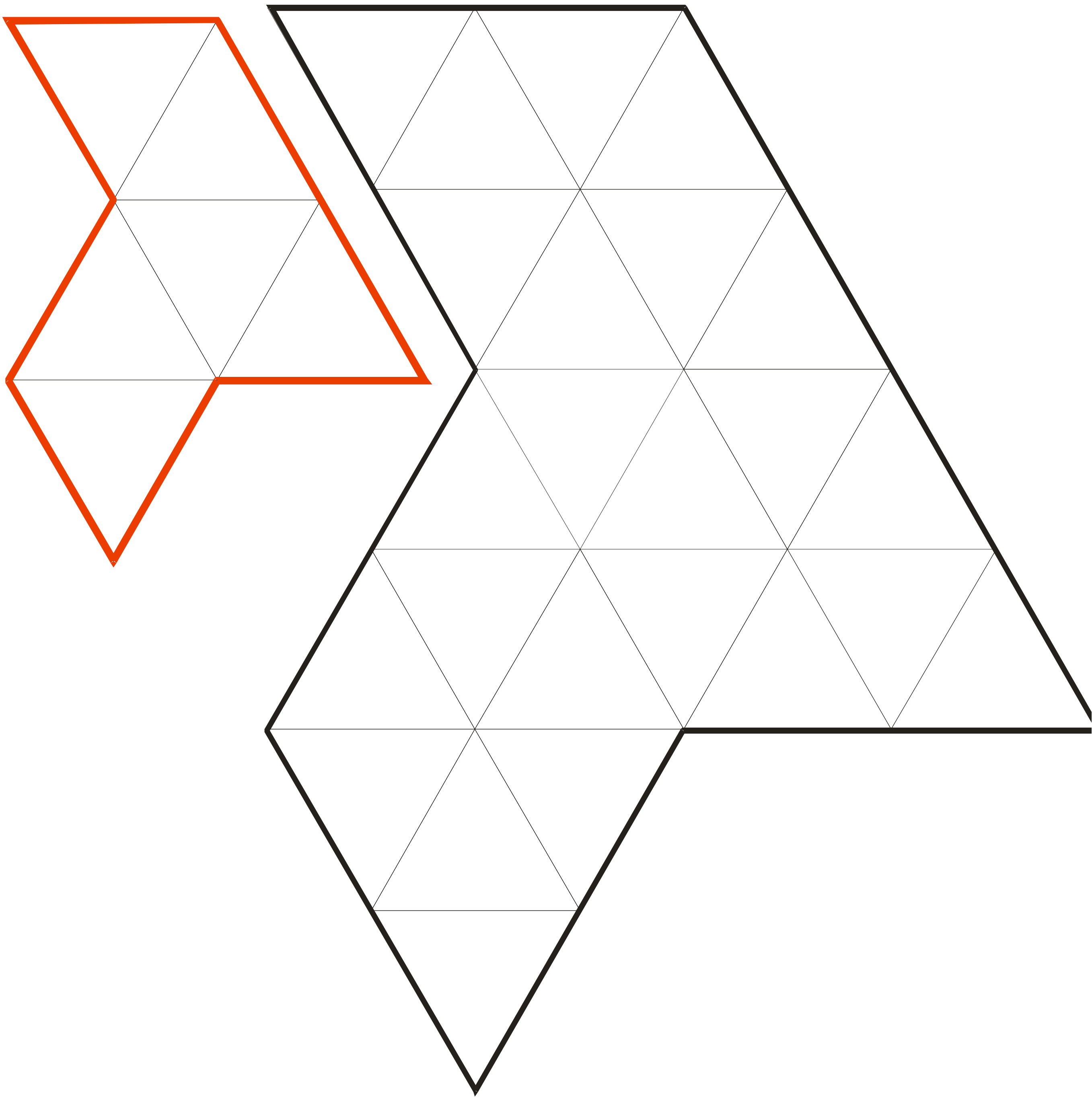


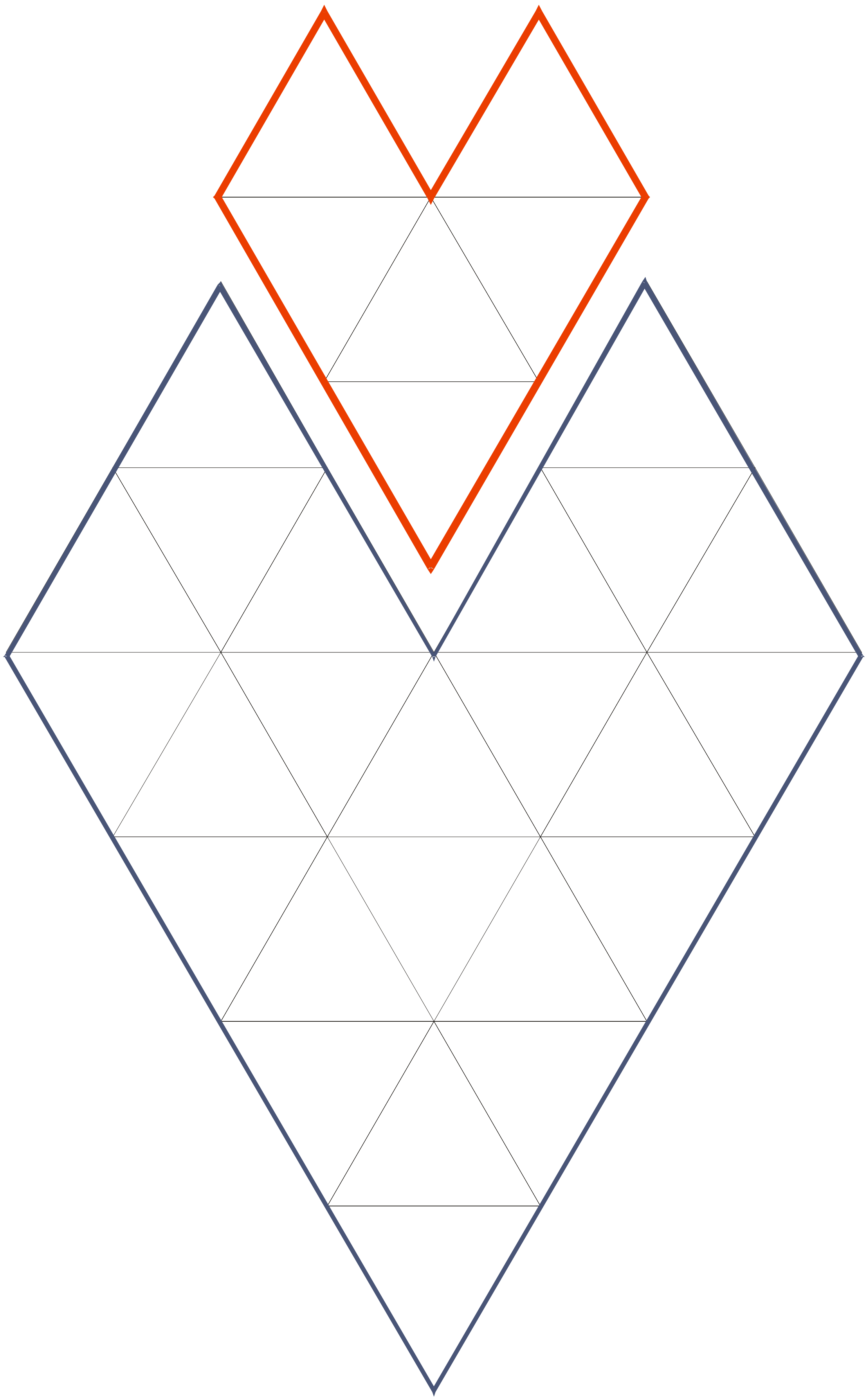


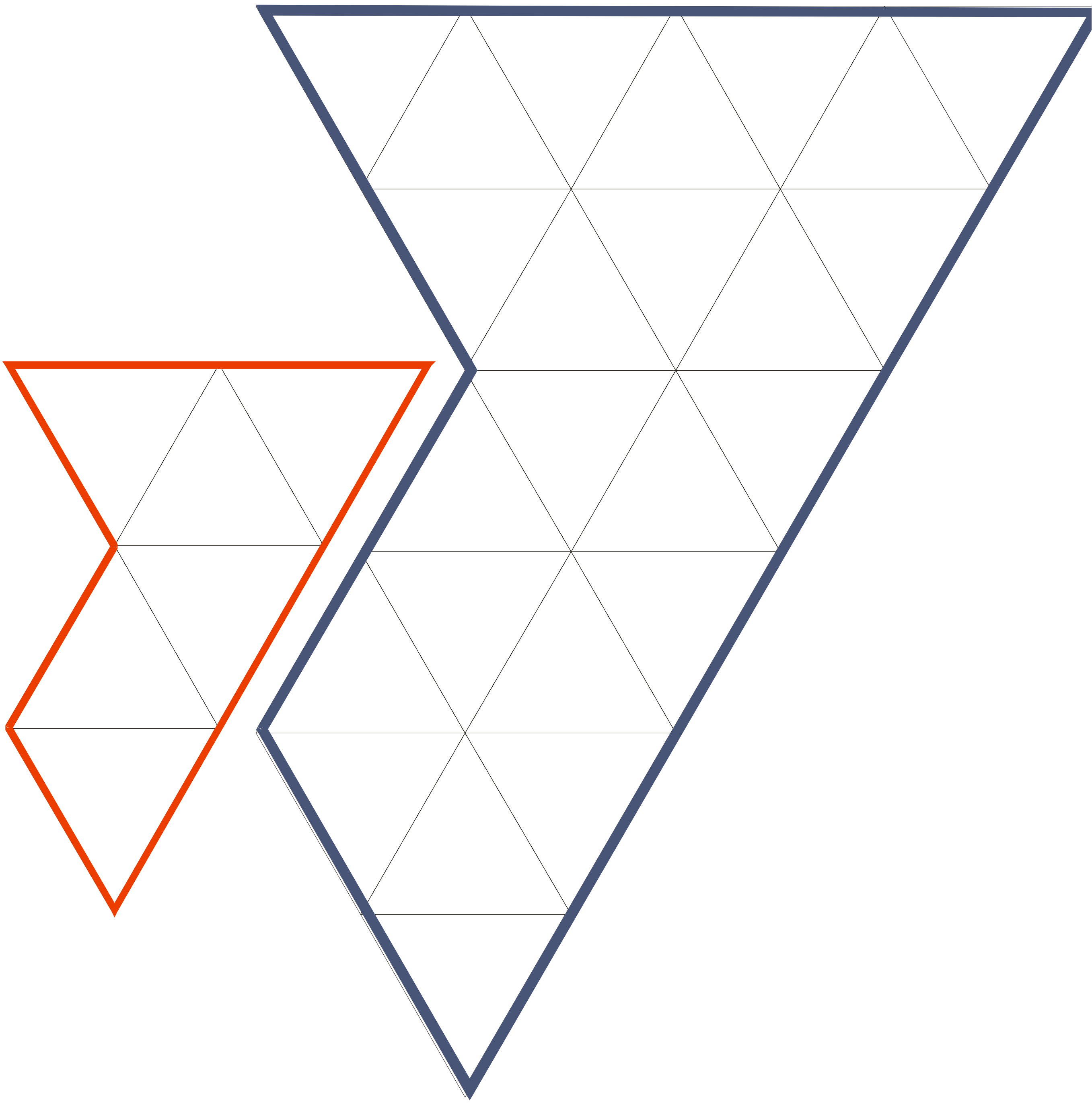


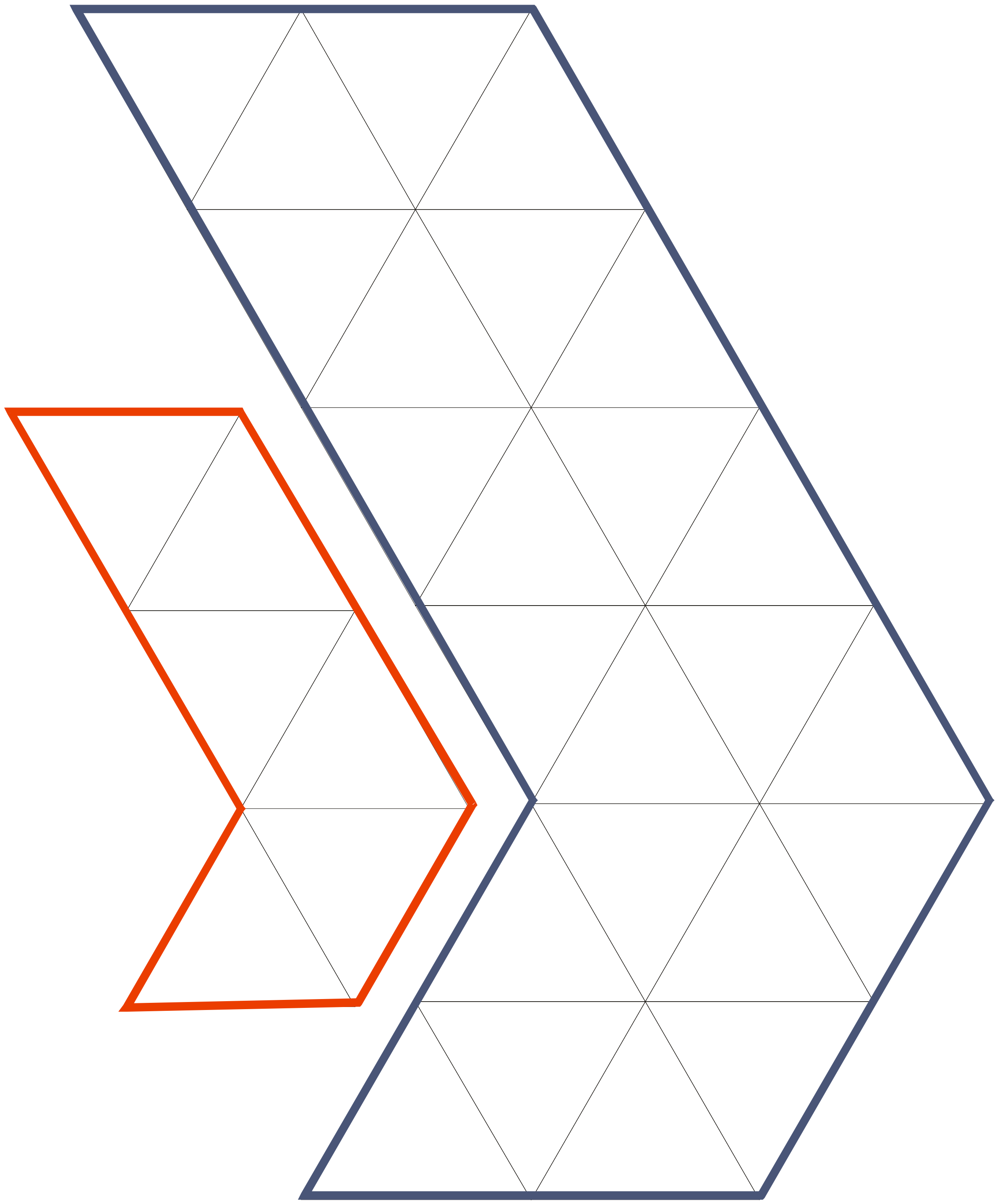


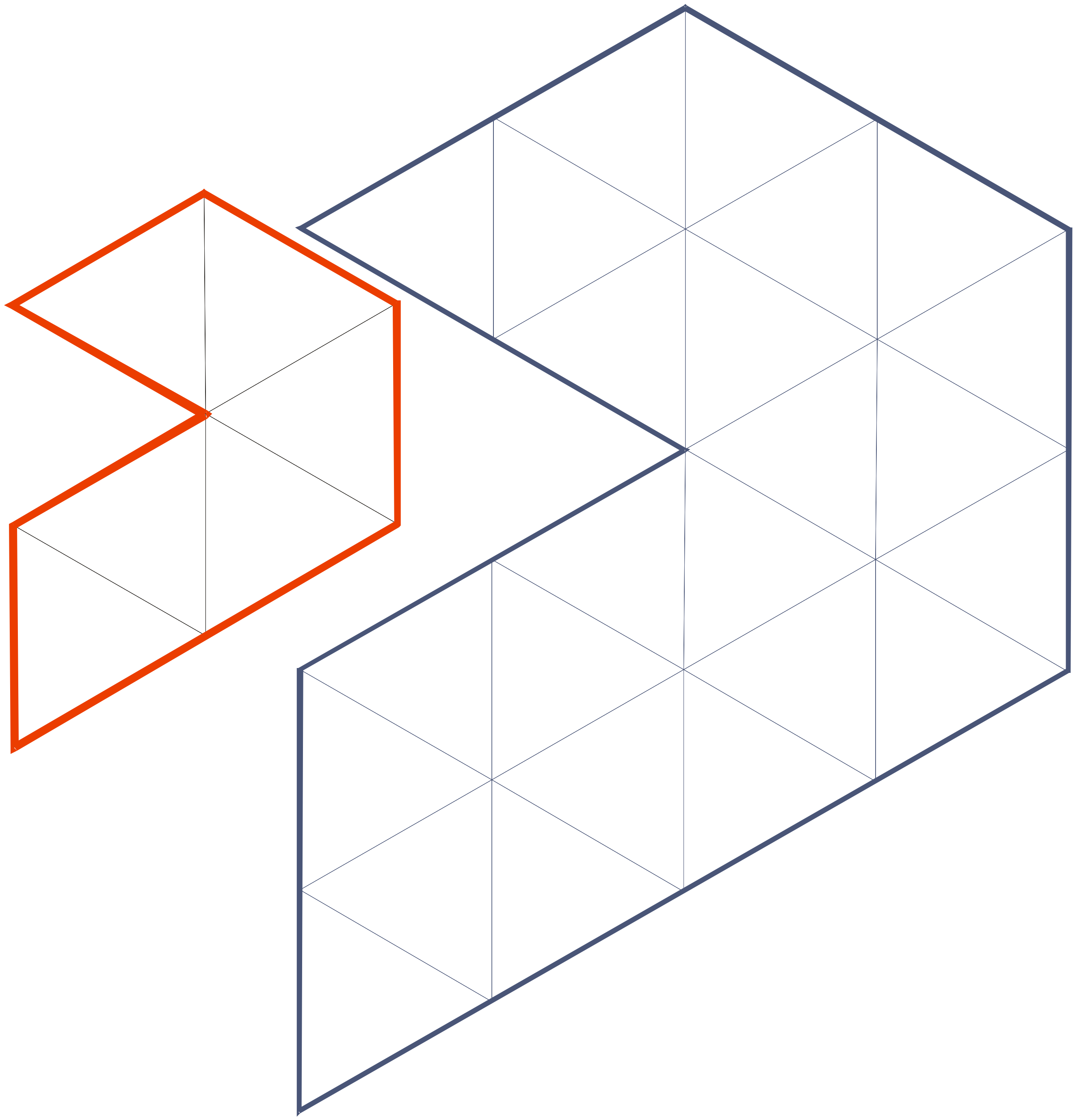


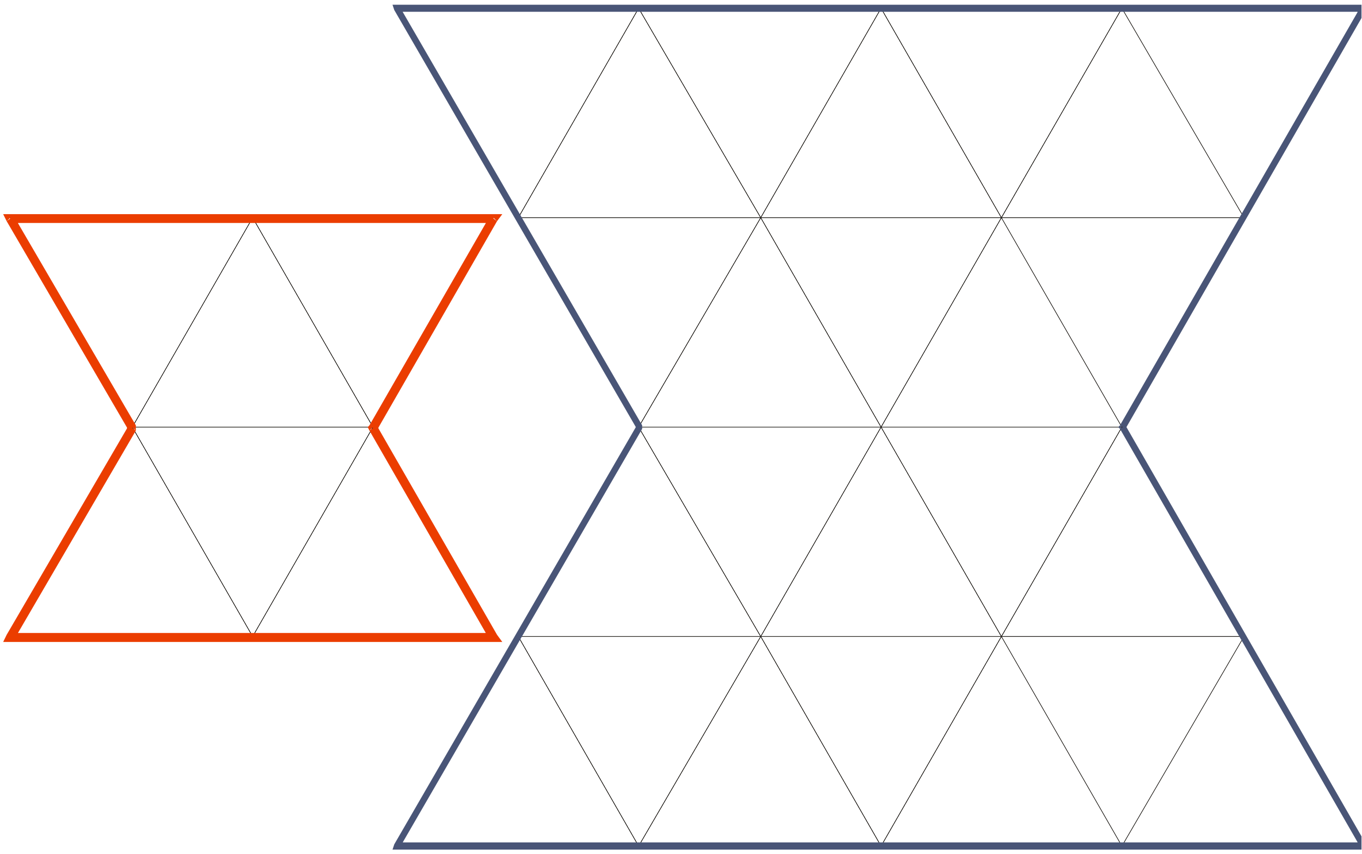


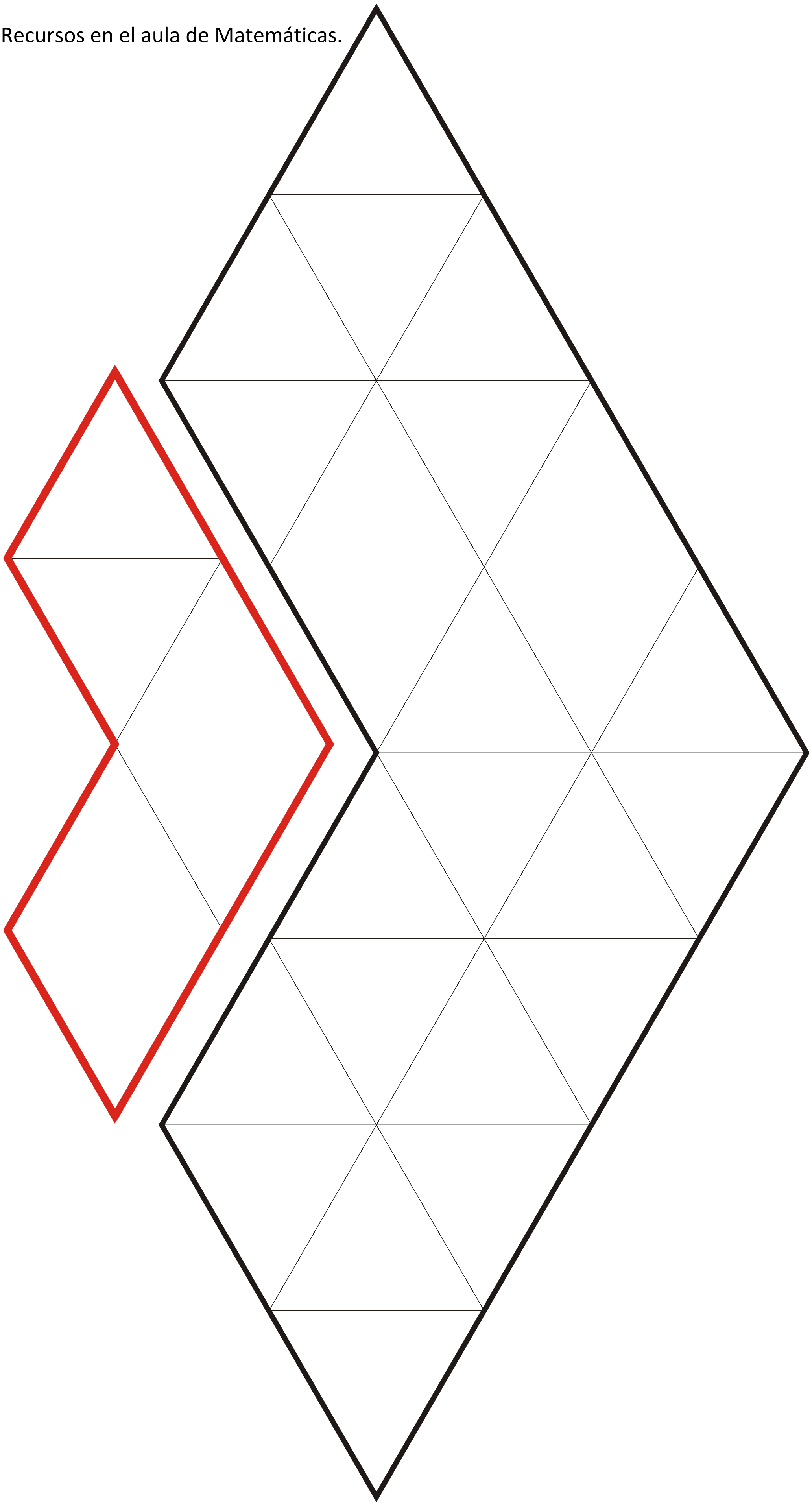




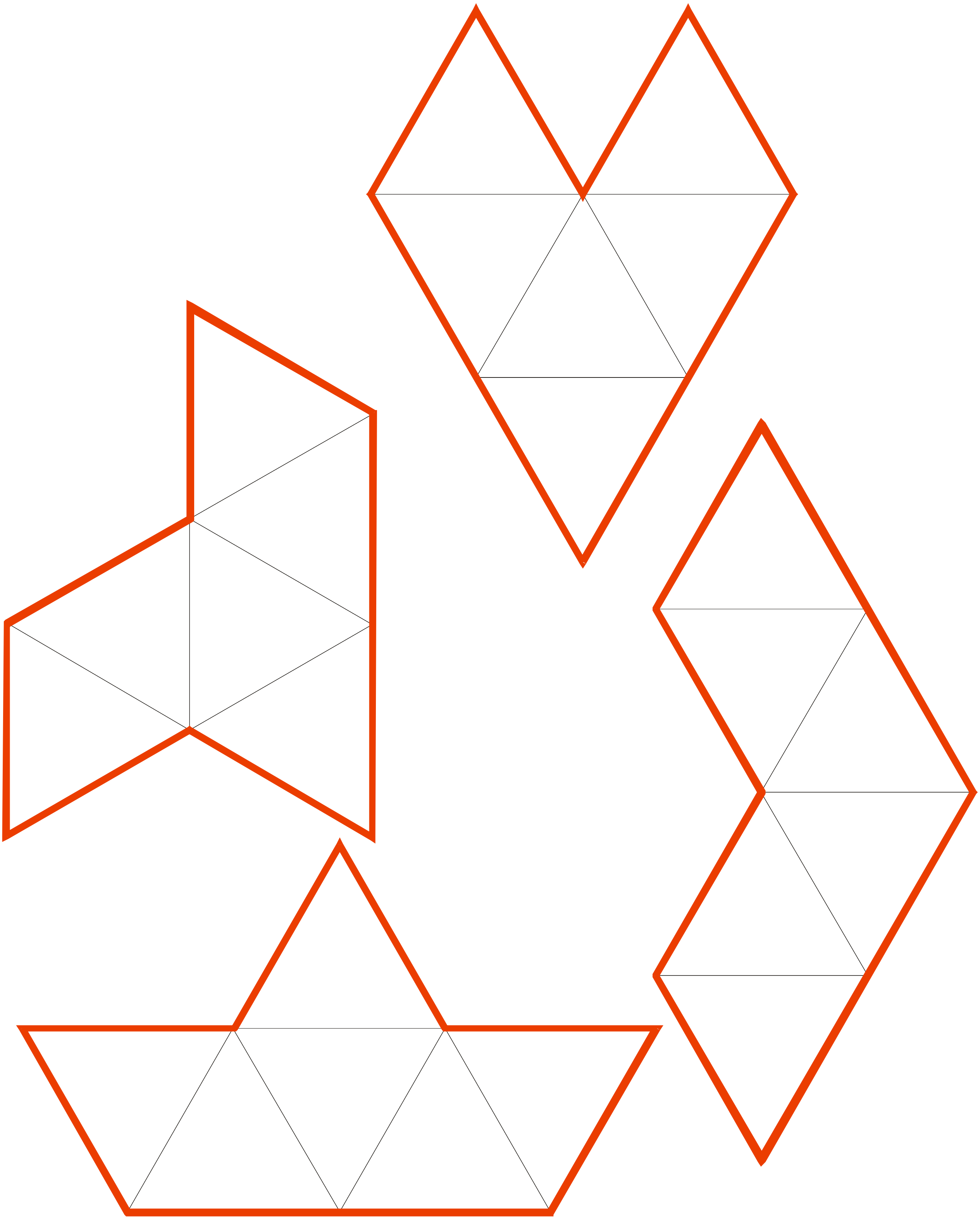


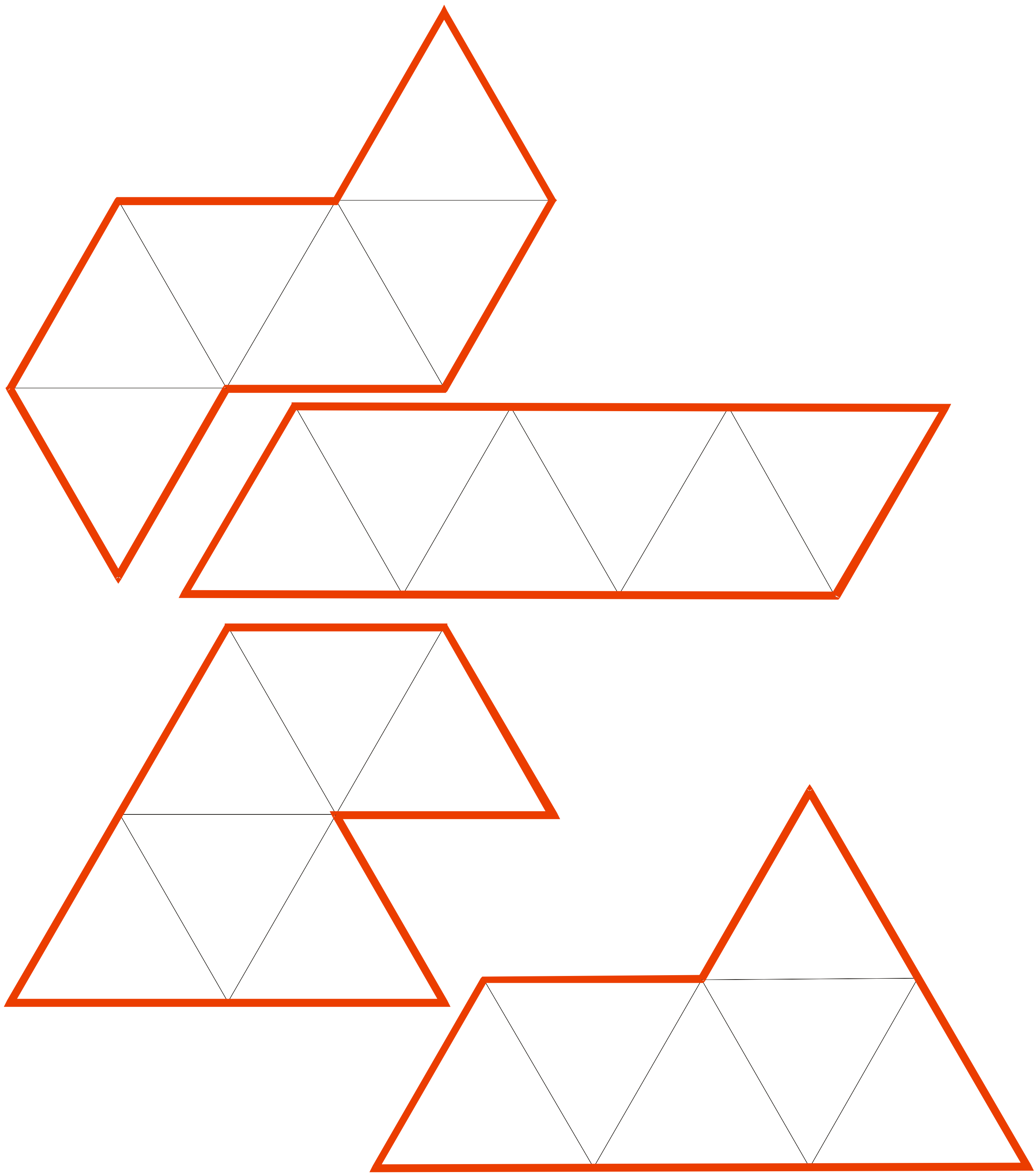


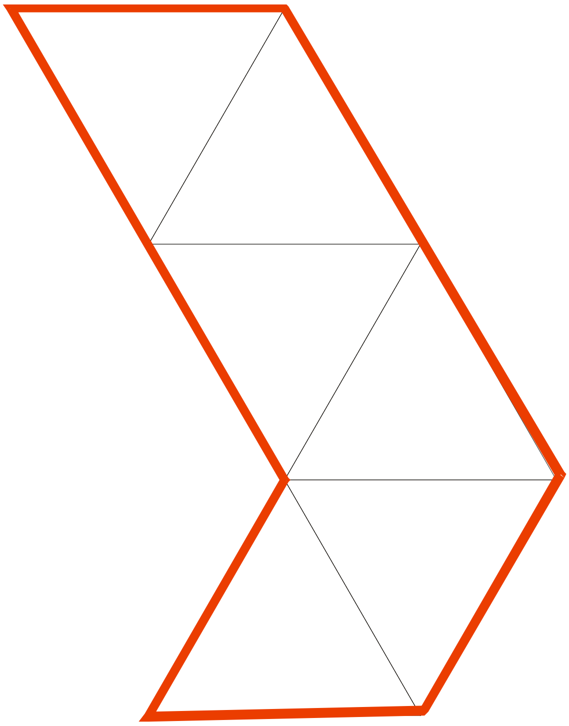


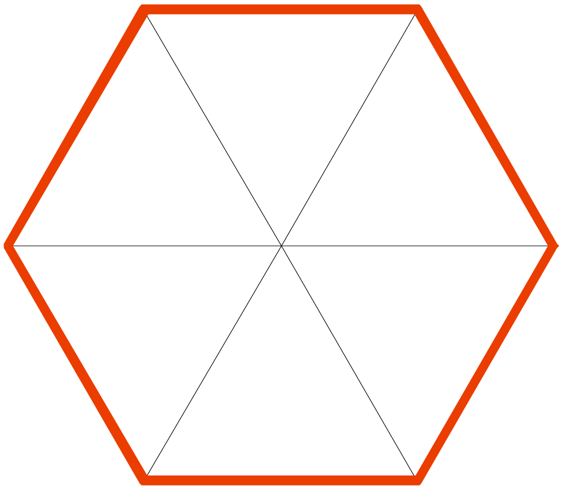


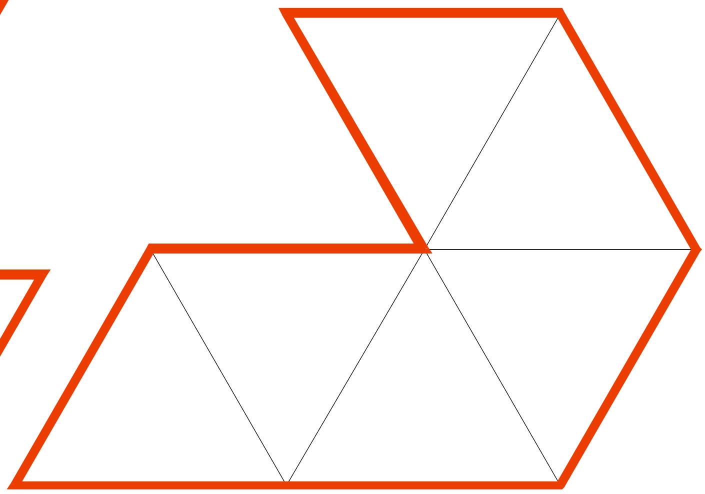
Ayudándote con un espejo o con el mira, busca los ejes de simetría de los hexaamantes:

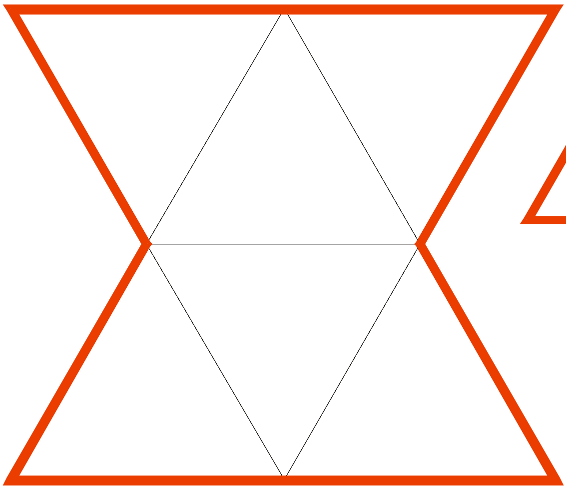












Construye figuras iguales de 12 triángulos de superficie con diferentes hexaamantes. No te olvides dibujarlas en la trama triangular, para enseñarle una a tu compañero y que construya otra igual

Ejemplo:

Construye figuras iguales de 18 triángulos de superficie con diferentes hexaamantes. No te olvides dibujarlas en la trama triangular, para enseñarle una a tu compañero y que construya otra igual.

Construye figuras iguales de 12 triángulos de perímetro con diferentes hexaamantes. No te olvides dibujarlas en la trama triangular, para enseñarle una a tu compañero y que construya otra igual.

Construye figuras iguales de 18 triángulos de perímetro con diferentes hexaamantes. No te olvides dibujarlas en la trama triangular, para enseñarle una a tu compañero y que construya otra igual.

Elige dos hexaamantes y forma la figura con mayor perímetro posible.

Elige dos hexaamantes y forma la figura con menor perímetro posible.

Elige un hexaamante y construye otro semejante a él cuyo lado sea el triple.

Dibújalos en la trama triangular.

ANEXO D

Anexo D.1: Actividades con la calculadora Ti voyage 200

Jose Luis Lupiáñez Gómez

(Resumen de la comunicación impartida en la XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, celebrada en Santo Domingo, República Dominicana, en Julio de 1999)

Introducción

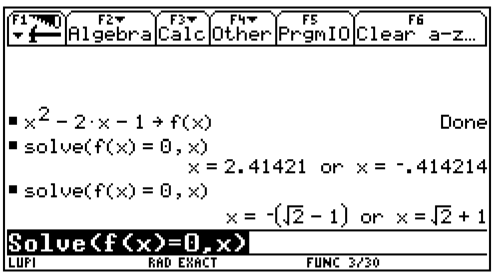
En este documento se describe una actividad usando la calculadora TI Voyage 200. En ella se aborda la búsqueda de los ceros de una función de segundo grado analítica, gráfica y numéricamente.

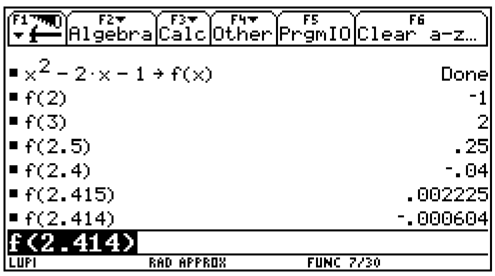
Ceros de una función cuadrática

Estudiamos la búsqueda de los ceros de la siguiente función de segundo grado, con la ayuda de la calculadora TI Voyage 200:

$f(x) = x^2 - 2x - 1$

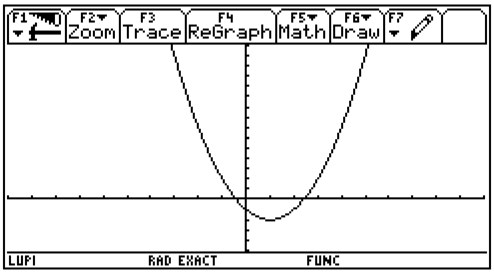
Ésta es una tarea que puede afrontarse de varias formas. La más inmediata, es usar el comando SOLVE, que nos otorga la raíz de la ecuación correspondiente en fracciones de segundo, si bien, no es el modo más provechoso desde el punto de vista didáctico. Otra opción que permite el poder de cálculo de la máquina, es la aproximación numérica a partir de la definición de la función:

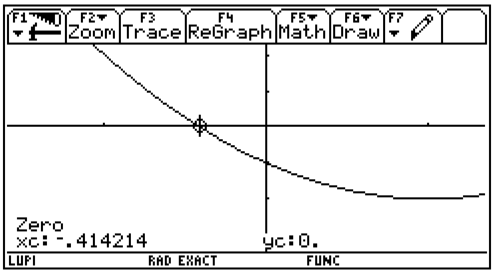




Posibilidades más interesantes nos las brinda la representación gráfica de la función, a partir de la cual podemos ir aproximando la raíz usando los

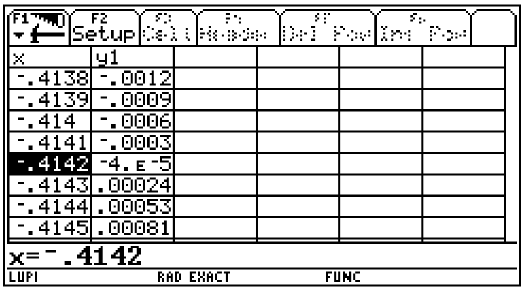
comandos ZOOM y TRACE. Con el primero vamos ampliando la zona de la parábola que más nos interesa, y el segundo va recorriendo la traza de la función indicando el valor de abscisa y ordenada por el que está pasando. Desde la pantalla de graficación, también es ejecutable un comando llamado





ZERO, que nos da el corte con el eje con sólo indicarle el intervalo en el que se produce un cambio de signo:

Otra importante cualidad de la calculadora es la representación tabular; con la orden TABLE, se nos muestra la tabla de valores de la función, que por defecto, va generando las imágenes de los números enteros. Pero dado que podemos elegir el punto de inicio de esa tabla, y la variación con la que deseamos que vaya evaluando, es sencillo ir aproximando los ceros de la función con la precisión que deseemos, como queda ilustrado en la figura siguiente:



x	y1
⁻.4138	⁻.0012
⁻.4139	⁻.0009
⁻.414	⁻.0006
⁻.4141	⁻.0003
⁻.4142	⁻4.E⁻5
⁻.4143	.00024
⁻.4144	.00053
⁻.4145	.00081

x=⁻.4142

De esta manera, se han descrito cinco formas diferentes de abordar con la calculadora un problema que, por tradición, se resolvía sólo usando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado.

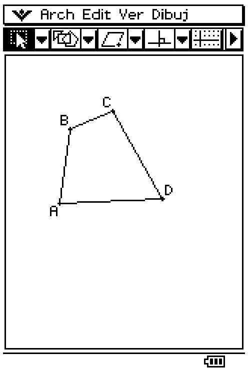
Anexo D2. Actividades geométricas con la calculadora Casio Classpad.

Jose Luis Lupiáñez Gómez

Universidad de Granada

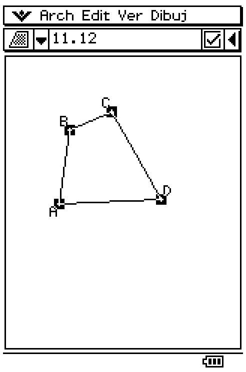
Actividad 1.

Dado un polígono convexo de cuatro lados ABCD, ¿es posible hallar un punto E, de manera que el triángulo ABE tenga la misma superficie que ese polígono? ¿Qué resultado puede generalizarse de esta construcción?

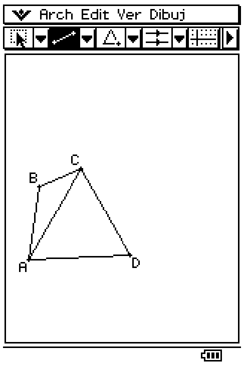


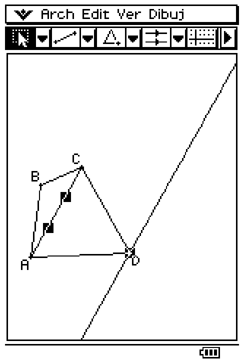
Solución:

En primer lugar medimos el área del polígono ABCD para después compararla con la del triángulo que se construye a continuación:

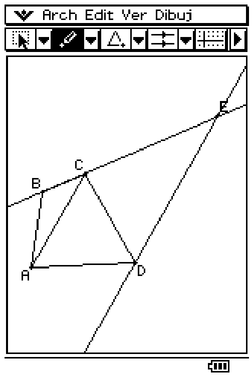


Trazamos la diagonal AC, y una recta paralela a esta diagonal que pase por el vértice D:

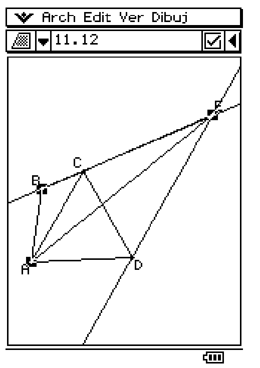




A continuación prolongamos el lado BC, y el punto de corte con la recta anterior, nos determina el punto E deseado:



Finalmente construimos el triángulo ABE y comprobamos que su área es 11.12 cm2, que es la que tenía la figura original:



La razón es evidente: al tener la misma base y estar construidos sobre rectas paralelas, los triángulos ACD y ACE tienen la misma superficie, y esa es la única diferencia entre el cuadrilátero ABCD y el triángulo ABE.

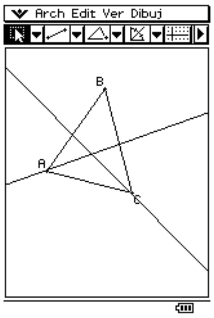
Este razonamiento nos lleva a generalizar que dado cualquier polígono convexo $A_1A_2\ldots A_n$, siempre es posible encontrar un punto E, de modo que el triángulo A_1A_2E tiene la misma superficie que el polígono original.

Actividad 2.

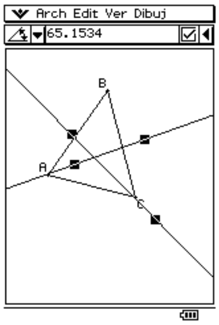
¿Es posible construir un triángulo en el que dos de sus bisectrices sean perpendiculares?

Solución:

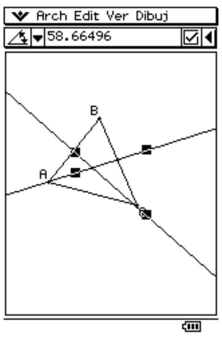
Consideremos un triángulo ABC y tracemos dos bisectrices por los vértices A y C:

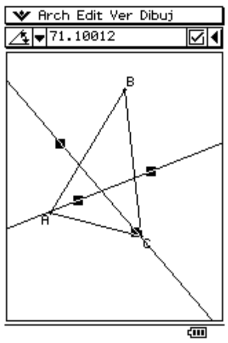


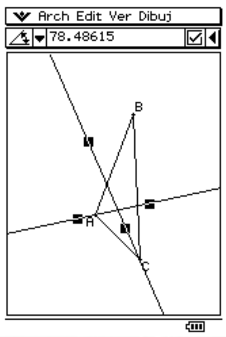
Midamos el ángulo que forman esas dos rectas:

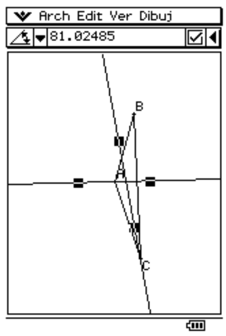


Podemos variar el triángulo original, y observar cómo cambia ese ángulo:

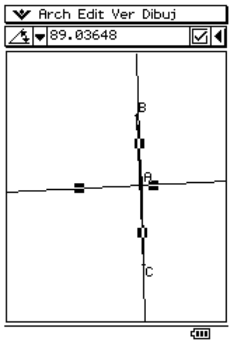








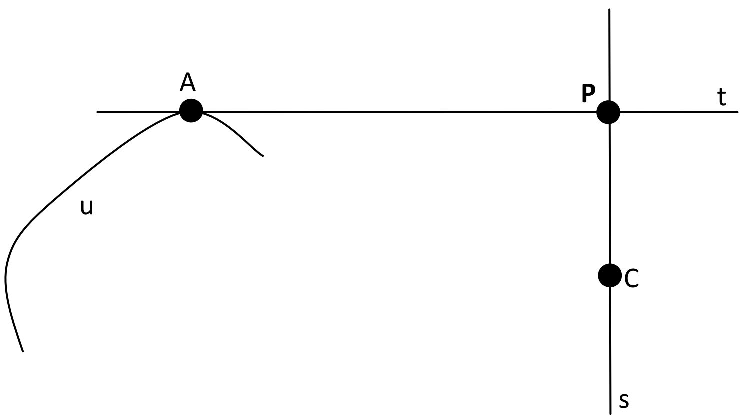
Por más intentos que se hagan, sólo se pueden alcanzar valores cercanos a los noventa grados cuando uno de los dos vértices sobre los que se han construido las bisectrices, se acerca al lado opuesto del triángulo:



De hecho, para lograr que las bisectrices sean perpendiculares, el triángulo tiene que dejar se serlo, pues necesariamente un vértice se sitúa sobre el lado opuesto. Esta propiedad geométrica se ve refrendada con la demostración algebraica de que no es posible construir un triángulo con dos de sus bisectrices perpendiculares entre sí.

Actividad 3. Lugares Geométricos.

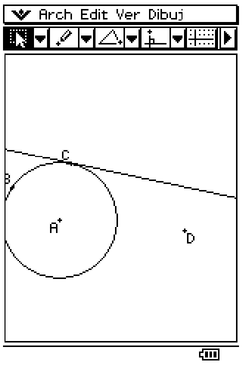
*Dada una curva **u**, un punto **A** cualquiera sobre **u**, y un punto **C** exterior a **u**, se define la **curva pedal** (o **podaria**) asociada a **(u, C)** como el lugar geométrico que describe el punto de corte **P** entre la recta **t** tangente a **u** en **A**, y la recta **s** perpendicular a **t** que pasa por **C**:*

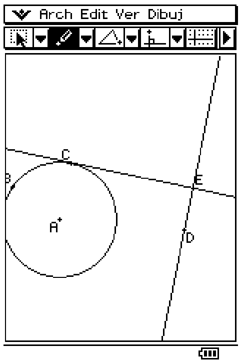


Estudiar cuál es la curva pedal asociada a la circunferencia para algún punto exterior a ella.

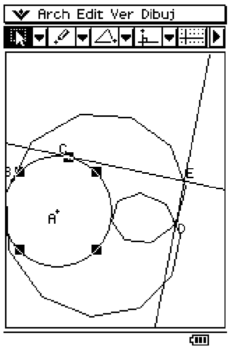
Solución:

Comenzamos la construcción:



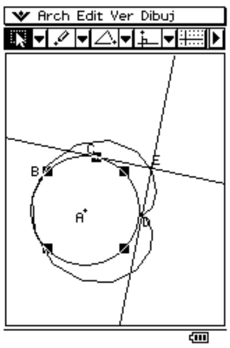


Ahora calculamos el lugar geométrico de E cuando C recorre la circunferencia…



Y obtenemos el **Caracol de Pascal**, una curva que tradicionalmente se construye desde su expresión en forma paramétrica. Este tipo de actividades las brinda la geometría dinámica.

¿Qué ocurre se el punto D está sobre la circunferencia? En ese caso, se obtiene otra bella curva, la **Cardioide**:



Anexo D.3: Implementado problemas de optimización con calculadora gráfica.

Jose Luis Lupiáñez Gómez

Antonio Codina Sánchez

(Resumen del trabajo presentado en el X Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en El Ejido, Almería, en Septiembre de 2002)

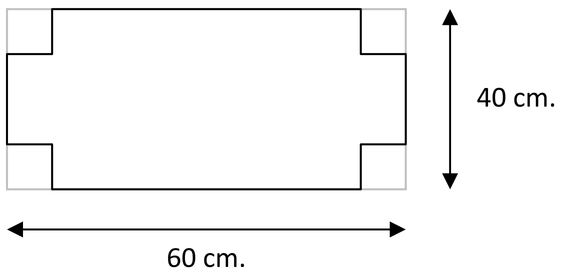
Introducción

En este artículo, describimos una actividad con la calculadora gráfica TI-83 Plus, planteada y estructurada a partir de una propuesta de Browning & Channell (1997). Se enmarca dentro del estudio de funciones, y más concretamente, en los problemas de optimización, es decir, se modeliza un problema mediante una función, y el cálculo de sus extremos arroja información sobre el problema inicial.

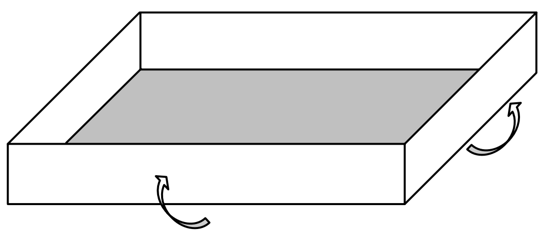
El desarrollo de la tarea así como en general este tipo de problemas de optimización, son fácilmente trasladables a los últimos cursos de Secundaria o a Bachillerato (Codina, 2001).

El enunciado de la actividad es el siguiente:

"La Srta. Pérez es profesora de Ciencias en el Colegio El Buen Estudiante. Para su laboratorio necesita varias cajas abiertas por arriba para almacenar los diferentes materiales que usa en sus experimentos, y ha comprado un buen número de láminas planas de metal para hacerlas. Cada lámina es un rectángulo que mide 40 cm de ancho y 60 de largo:



La idea que tiene es cortar un cuadradito en cada esquina de una lámina, y doblar hacia arriba las pestañas pegándolas por su borde:



¿Podrías ayudar a la profesora Pérez a elegir las medidas del cuadradito que se recorta en las esquinas, con idea de obtener la caja con el mayor volumen posible?”

Desarrollo de la Actividad

Aunque la actividad está ideada para realizarse por grupos en el aula a lo largo de dos horas (suponiendo que se domina el manejo técnico de la calculadora necesario).Los principales comandos de la calculadora que se manejan son aquellos relacionadas con el estudio de funciones: introducir funciones en la calculadora, acceder a las tablas de valores, representación gráfica de funciones, y los comandos $\boxed{\text{TRACE}}$ y $\boxed{\text{ZOOM}}$.

Cada grupo de unos cuatro estudiantes dispone de una calculadora TI-83 Plus durante todo el desarrollo de la actividad. También disponen de un guión de trabajo con las diferentes cuestiones que constituyen la actividad. y analizaremos a continuación el contenido de este guión.

El Guión de Trabajo

El guión se estructura a lo largo de tres bloques, cada uno de los cuales incluye distintas preguntas. Como se observará, no en todos los bloques es necesario el uso de la calculadora; sólo se usa en los bloques *II* y *III*.

Bloque I

1. *Si decidimos cortar cuadrados de 10 cm de lado en las esquinas de las láminas metálicas, determina las dimensiones y el volumen que tendrá la caja que formaremos al doblar las pestañas.*

2. *¿Cómo cambiarían esas dimensiones y ese volumen si los cuadrados que cortamos son de 5 cm de lado?*

3. *Si cortamos cuadrados más pequeños, ¿obtenemos necesariamente cajas de un volumen mayor? Explica tu respuesta.*

4. *Desde ahora supondremos que la medida del lado del cuadrado que cortamos sólo puede tomar valores enteros. En ese caso, el cuadrado más pequeño posible tendrá 1cm de lado. ¿Cuál es la medida más grande que puede tener el lado del cuadrado? Explica porqué no puede superarse esa medida.*

5. *Como la profesora Pérez quiere obtener cajas con el volumen más grande posible, ¿se te ocurre alguna manera de determinar la medida del cuadrado que cortaremos para lograr ese mayor volumen?*

6. *¿Es posible calcular el volumen de la caja si sólo conocemos su anchura? ¿Por qué?*

El objetivo de esta batería de preguntas es que los estudiantes identifiquen qué datos son los relevantes para resolver el problema, y como podemos dar una solución en casos particulares. Es interesante observar las reacciones de los estudiantes cuando comprueban que no por cortar cuadraditos más pequeños obtenemos una caja de un volumen mayor.

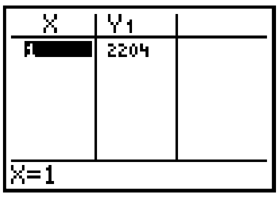
Las respuestas a la quinta cuestión casi siempre aludían al mayor volumen obtenido teniendo en cuenta sólo las medidas hechas hasta este momento, y pocas veces se buscó analizar los volúmenes resultantes de hacer todos los cortes posibles. Con la última pregunta de este bloque a menudo los estudiantes sostienen que se está hablando de una caja cualquiera, y que al menos se necesitan dos dimensiones para hallar el pues el tercero se puede deducir de los dos primeros.

Bloque II

7. *Encuentra una expresión algebraica que permita conocer el volumen de la caja a partir de su altura, es decir, del lado del cuadrado recortado. Construye una función a partir de esa expresión, en la que la variable independiente (x) sea la altura.*

8. *Introduce esa función en la calculadora, pero ten en cuenta que lo que nos interesa en el problema es que los valores posibles de x sean 1, 2, 3, 4,…*

9. *Observa la tabla de valores de la función. Explicas con palabras lo que significan los datos que aparecen en la primera fila (que es la que se muestra a continuación):*



10. *Describe lo que observas en los diferentes valores del volumen cuando la altura de la caja varía desde x=1 hasta x=19. (Por ejemplo, cuando aumenta la medida del lado del cuadrado que cortamos, ¿qué le pasa al volumen de la caja correspondiente?)*

11. *¿Cuál es la medida del cuadrado que cortamos (valor de x) que nos da una caja con el mayor volumen (valor de Y1)?*

Altura: ______ cm   Largo: ______ cm   Ancho: ______ cm

Volumen: ______ cm^3

12. *Como sabes, hemos supuesto que las posibles medidas del lado del cuadrado son siempre números enteros, pero si consideráramos también el poder hacer cortes hasta en milímetros, ¿se te ocurre entre qué dos medidas de la altura (en enteros) estaría el volumen máximo? ¿Por qué? Razona tu respuesta.*

X = ______ cm $\Rightarrow$ *V = ______ cm*

X = ______ cm $\Rightarrow$ *V = ______ cm*

13. *Modifica la precisión de los valores hasta las milésimas ¿Cuál es el valor máximo ahora del volumen? ¿En qué punto se ha alcanzado? ¿Está ese punto dentro del intervalo que habías considerado en la pregunta anterior?*

14. *Desde tu punto de vista ¿sería posible dar un valor más preciso de ese punto en el que se alcanza el máximo? ¿Por qué?*

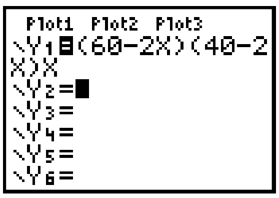
15. *Justifica o niega las siguientes afirmaciones, razonando tu respuesta:*

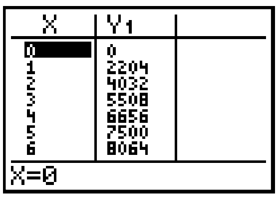
    a) *El volumen de la caja aumenta y disminuye al incrementar la altura de la caja.*

    b) *Es imposible hallar el volumen de una caja conociendo sólo una de sus tres dimensiones.*

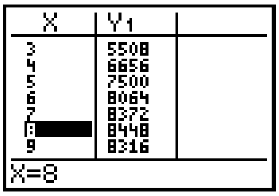
    c) *La relación entre la altura de una caja y su volumen es lineal.*

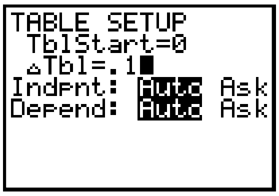
En este bloque se introduce por primera vez la notación algebraica en el problema, y a lo largo de varios ítems se insiste en el significado de las diferentes variables que intervienen en el problema. (cuestiones *9* y *11*, por ejemplo). También en este punto del cuestionario se introduce la calculadora, y se comienza introduciendo la función que relaciona el volumen de la caja con su altura (cuestiones *7* y *8*), y se realiza un estudio sobre la tabla de valores de la función la calculadora.

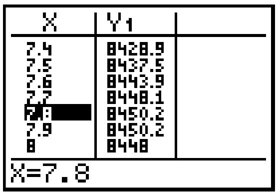


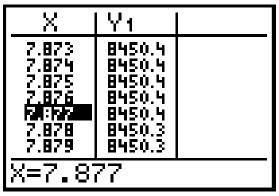


La décima cuestión persigue comprobar la relación entre la altura de la caja y el volumen que resulta en cada caso. Aquí se puede observar la no linealidad de esta relación, aunque lo cierto es que la mirada de los estudiantes se dirige directamente a hallar el valor que genera un mayor volumen (para una altura de *8 cms*. aparece un volumen de *8448* cm^3.). Con idea de introducir un nuevo "problema", en la duodécima cuestión se plantea encontrar el volumen máximo entre dos valores enteros; es decir, dar un intervalo en el que se encuentre el máximo de la función. En la pregunta *13* se depura la precisión de la calculadora a las décimas y se pide que se encuentre en esas condiciones el máximo buscado.









De esta manera se puede generar un proceso que permite encontrar el extremo de una función con tanta precisión como se desee, siempre condicionado claro, por la capacidad de la calculadora (10 cifras decimales). En este punto surge una buena ocasión para generar un debate acerca de lo apropiado de tanta precisión, ya que no es bueno desvincularse de la realidad del problema original: ¿tiene sentido hablar de hacer un corte milimétrico con unas tijeras? ¿Y de décimas o centésimas de milímetro?

Finalmente, en el apartado *c)* de la cuestión *15*, se justifica que la relación no es lineal porque el aumento de una variable no implica el incremento de la otra, lo cual tiene sentido en el contexto del problema pero no constituye una condición suficiente en general.

En el siguiente bloque se afronta este estudio de extremos en un ambiente gráfico, y es a su vez fuente de otros problemas, como por ejemplo determinar la ventana de graficación apropiada para ver la *parte de función que nos interesa*. No olvidemos que la función volumen que hemos definido es una cúbica, mientras que en nuestro problema trabajamos con una zona *parabólica* de esa función.

Bloque III

16. *Vamos a representar gráficamente la función construida en el bloque anterior. Como sabes, primero hay que ajustar la ventana en la que aparecerá esa gráfica en el menú WINDOW:*

    a) *Señala como límite inferior de X el valor 0 y como superior 20. ¿Encuentras adecuada esta selección? ¿Por qué?*

    b) *¿Cómo seleccionarías los límites para el eje Y de manera que podamos ver la parte de la gráfica que nos interesa en nuestro problema? Explica tu respuesta.*

    c) *¿Qué valores serían apropiados para la escala?*

17. *Representa gráficamente la función, y explica qué relación encuentras entre su forma y los datos que obtuviste en el bloque anterior con la tabla de valores.*

18. *¿En qué punto se alcanza el valor más alto de la gráfica? Ayúdate del comando TRACE de la calculadora.*

Altura de la Caja (x): ________ cm   Volumen (y): _________ cm^3

19. *Como podrás observar, se puede localizar un punto de máxima altura, pero lo que no podemos asegurar es que realmente sea el buscado, ya que verás que al recorrer la gráfica con el comando TRACE los decimales van dando saltos, y es posible que el valor buscado lo saltemos. Pero lo que sí podemos hacer es localizar dos valores de x entre los que se encuentre ese máximo: Usa el cursor para localizar la coordenada x de los puntos que están inmediatamente a la izquierda y a la derecha del punto localizado en la pregunta anterior.*

Punto a la Izquierda: ________

Punto a la Derecha: _________

20. *Lo mismo que cuando usábamos la tabla de valores para conseguir una mejor aproximación del máximo que buscamos, también es posible llevar a cabo este estudio con la gráfica. Para ellos se emplea el ZOOM de la calculadora. Explora las opciones Zoom Acercar y Zoom Alejar y explica qué observas.*

21. *Emplea la opción ZCaja para destacar una zona de la gráfica que interese para el estudio del máximo, y repite la cuestión 18 en esta nueva gráfica. ¿En qué valor de x se alcanza ahora el punto más alto de la gráfica? Ayúdate del comando* TRACE *de la calculadora.*

Altura de la Caja (x): ________ cm   Volumen (y): _________ cm^3

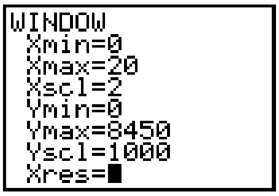
22. *Encuentra un nuevo intervalo de la variable x en el que se encuentre el máximo:*

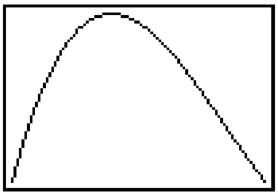
Punto a la Izquierda: ________   Punto a la Derecha: _________

23. *Puedes repetir la opción ZCaja tantas veces como desees. Como recordarás, nuestra idea era recortar los cuadrados en las esquinas de las láminas como máximo con una precisión de milímetros. A la luz de lo que has observado en este estudio gráfico, ¿Puedes dar por tanto una medida con precisión milimétrica que nos garantice obtener una caja con el mayor volumen posible?*

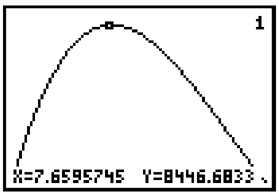
Altura: ______ cm   Largo: ______ cm   Ancho: ______ cm

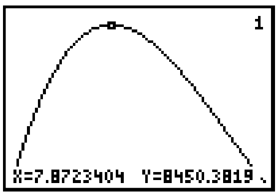
Volumen: ______ cm^3

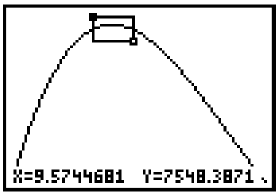


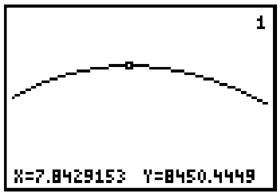


Una vez superado el escollo de representar la parte de la función que se adapta a nuestro problema (los estudiantes suelen apoyarse en los datos obtenidos en la tabla de valores), se busca el máximo de la gráfica en términos del punto más alto de la misma (cuestión *18*). Aquí pueden surgir diferencias entre distintos estudiantes, ya que no todos obtienen exactamente el mismo valor: el comando TRACE recorre la traza de la función a saltos, y de una calculadora a otra el valor del máximo puede diferir en algunos decimales (pregunta *19*). Desde esta situación, y aprovechando las opciones de zoom de la calculadora, las cuestiones *21*, *22* y *23* persiguen obtener precisión en esos valores:

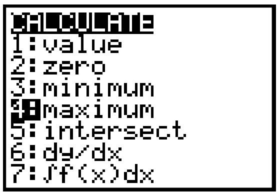


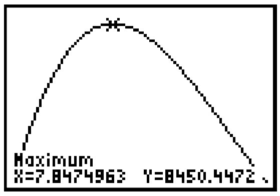






Con el comando CALC se puede hallar directamente el máximo de una función únicamente señalando un intervalo en el que se encuentre ese extremo (aunque es recomendable no usar inicialmente este comando):





Conclusiones

Con esta actividad se han afrontado tareas desde diversos frentes: por una parte, se ha desarrollado un contenido matemático de una manera diferente a la tradicional. Los problemas de optimización generalmente recurren a la derivación, pero aquí se centra el estudio en los aspectos numéricos y gráficos, tratando de poner de manifiesto las relaciones entre ambos sistemas de representación.

No se trata de encontrar *el* método *más adecuado*, sino ser capaz de discernir sobre las ventajas e inconveniente de *los* posibles métodos.

Referencias

Browning, C., Channell, D. (1997*) Graphing Calculator Activities for Enriching Middle School Mathematics*. Austin, TX: Texas Instruments.

Codina, A. (2001) Un problema de optimización en el ambiente Cabri-Géomètre, en Berenguer & Cobo (Eds.) *Investigación en el aula de Matemáticas: Retos de la Educación Matemática del siglo XXI*. Universidad de Granada, SAEM Thales, pp. 147-154.

Anexo D.4: Actividades sobre estadística con la calculadora casio Classpad.

Jose Luis Lupiáñez Gómez

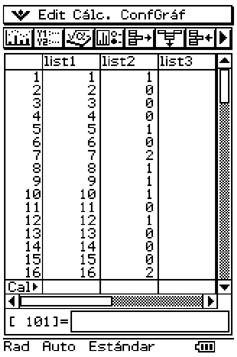
Universidad de Granada

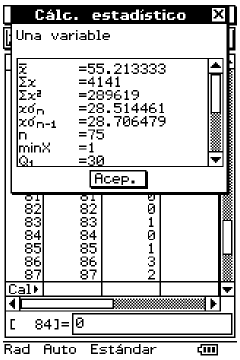
Actividad 1

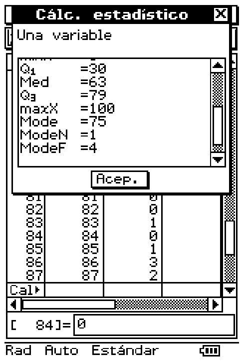
En la tercera prueba de un examen de acceso a un cuerpo de funcionarios, los 72 candidatos que habían pasado las dos pruebas anteriores, obtuvieron las siguientes calificaciones (entre 1 y 100):

32	*79*	*71*	*51*	*30*	*79*	*75*	*75*	*55*	*5*	*36*	*12*	*75*	*87*	*63*	*16*	*37*	*35*
92	*71*	*61*	*37*	*70*	*66*	*95*	*80*	*71*	*16*	*7*	*92*	*63*	*17*	*47*	*62*	*33*	*10*
51	*90*	*86*	*48*	*24*	*25*	*75*	*86*	*28*	*50*	*92*	*89*	*7*	*79*	*39*	*27*	*74*	*77*
69	*87*	*9*	*70*	*99*	*24*	*94*	*86*	*39*	*39*	*1*	*22*	*89*	*85*	*19*	*8*	*74*	*38*

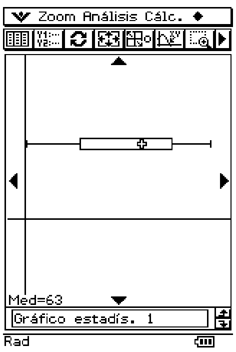
a) *Hallar la media de las calificaciones, la desviación típica, la mediana y la moda de la distribución.*



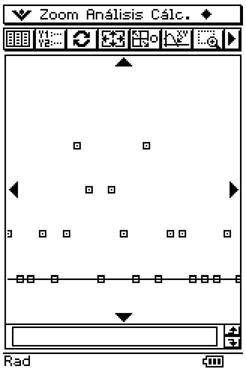




b) *Representa los datos de la distribución en identifica la mediana de la misma que se ha calculado antes.*



c) *Representa gráficamente la distribución de las calificaciones que están por encima de 80 puntos.*



d) *Si la nota de corte para acceder a la última prueba del examen es 80, ¿cuántos candidatos podrán pasar?*

Analizando la gráfica anterior se observa que son 18 candidatos los que han sacado 80 o más puntos.

Actividad 2.

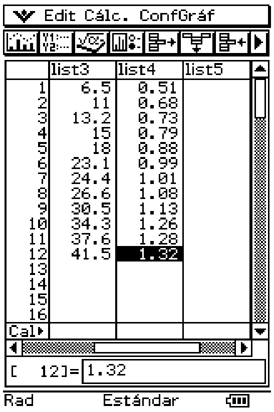
Un grupo de escolares intenta hallar la relación matemática entre lo que mide un péndulo y su periodo. Después de construir un péndulo sencillo, toman varias medidas del tiempo de periodo para diferentes longitudes de cuerda, obteniendo los siguientes resultados:

Longitud (cm)	Tiempo (s)
6.5	0.51
11	0.68
13.2	0.73
15	0.79
18	0.88
23.1	0.99
24.4	1.01
26.6	1.08
30.5	1.13
34.3	1.26
37.6	1.28
41.5	1.32

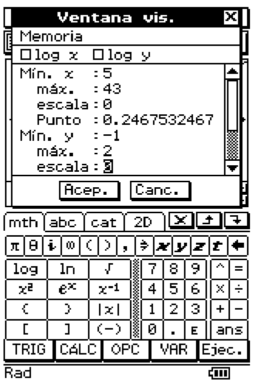
¿Podemos deducir de estos datos la relación entre la longitud del péndulo y el tiempo que tarda en hacer un movimiento completo (periodo)? ¿Podríamos estimar el periodo que tendría un péndulo como el construido pero con una longitud de 2 metros?

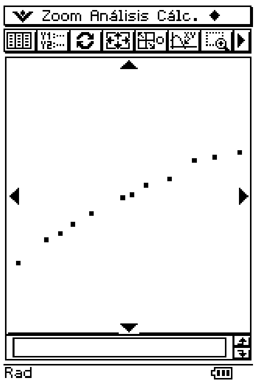
Solución

Comenzamos introduciendo los datos en la calculadora, usando las listas 3 y 4:

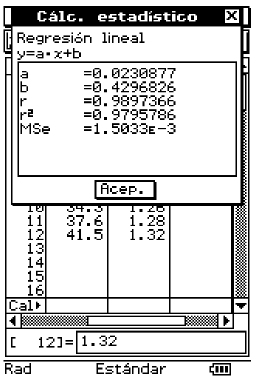


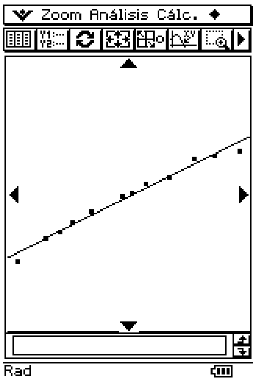
A continuación representamos gráficamente los datos para tener una referencia visual de la relación entre las dos variables consideradas. Es importante definir correctamente la ventana de visualización:



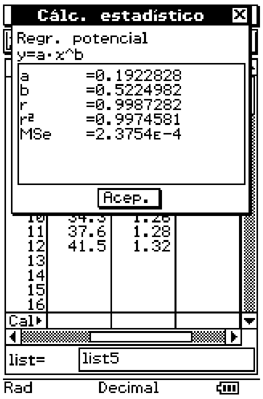


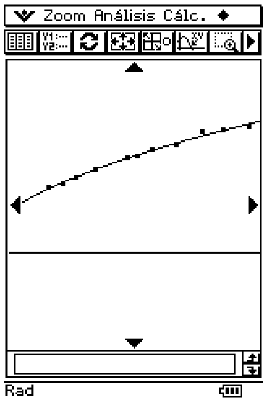
Como puede observarse, existe cierta regularidad lineal entre ambas variables, lo que nos lleva a hacer un estudio de regresión lineal:



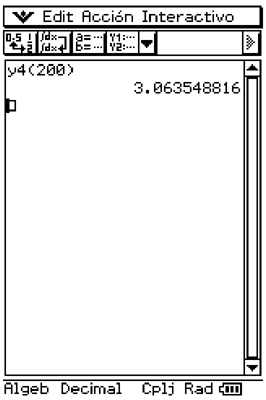


Aunque la recta se aproxima bien, da la impresión que al alejarse de los puntos centrales el ajuste pierde bondad. El cálculo de residuos confirma esta suposición, para lo cual hay que activar la casilla correspondiente (ver primera figura de la serie anterior). Por tanto, se necesita una función con cierta curvatura, e intentar un ajuste con una función potencial es una buena opción:





Al haber guardado la ecuación resultante en la variable *y4*, es sencillo tratar de predecir el periodo del péndulo (en segundos) cuando éste tenga una longitud de 2 metros:



Anexo D.5: Calculadora y sensores: La matemática en movimiento

Jose Luis Lupiáñez Gómez

Antonio Codina Sánchez

Resumen

En este trabajo analizamos el papel que la calculadora puede desempeñar en la enseñanza de las matemáticas, a través de un ejemplo de actividad en la que se emplean unos sensores que capturan datos reales del entorno y los transmiten para su estudio a la calculadora. Un punto central en esta reflexión es la necesidad de que el profesor de matemáticas planifique adecuadamente su labor docente para que el uso de estos recursos sea significativo y coherente con todo el proceso de enseñanza.

INTRODUCCIÓN

El incipiente desarrollo de las nuevas tecnologías está modificando substancialmente el entorno de la sociedad y, como consecuencia, nuestras actividades cotidianas. El ámbito educativo no es ajeno a este hecho, pero aún es necesario perseverar y profundizar en las discusiones acerca de cómo ha de llevarse a cabo una adecuada implementación de estas herramientas en el aula, para y ver cómo pueden adaptarse a los procesos de enseñanza y aprendizaje (Lupiáñez, 2000).

Ordenadores, Internet, calculadoras y otro tipo de recursos tecnológicos poseen un gran potencial para la educación en general, y para la educación matemática en particular. Pero no debe usarse este potencial como excusa para llevar al aula de matemáticas todo aquello que nos sorprende por su versatilidad; es necesario planificar con detalle qué uso queremos darle: qué competencias queremos y podemos desarrollar en nuestros escolares, qué tareas debemos diseñar para conseguirlo, y qué sistema de evaluación pondremos en práctica para medir ese desarrollo.

En este trabajo, ejemplificamos algunas de estas ideas describiendo algunas actividades que pueden desarrollarse en los últimos cursos de Educación Secundaria. Para ello, se emplean calculadoras gráficas, y unos sensores que se pueden conectar a ellas, y que permiten obtener datos físicos del entorno, como distancia, velocidad, temperatura, luminosidad o sonido.

Anexo D.6: Calculadora en la enseñanza de las matemáticas

En 1996, Penglase y Arnold realizaron una revisión de las investigaciones acerca de las calculadoras gráficas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Uno de los resultados de este trabajo es que en gran parte de esas investigaciones, se constata que el uso de las calculadoras redunda en ganancias para el conocimiento matemático de los estudiantes sobre funciones, las gráficas o para el desarrollo de visualización espacial. Pero este uso también puede crear obstáculos en aquellos estudiantes que tienen dificultades para relacionar conceptualmente los aspectos algebraico y gráfico en cálculo.

Como se declara, el empleo de las calculadoras también puede crear obstáculos, y uno de los argumentos que se esgrime habitualmente en contra del empleo de tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas es que se abandona y olvida lo que se hace con papel y lápiz, y eso va en perjuicio de la calidad en la formación. Hay que entender la implementación de las tecnologías informáticas en la enseñanza de las matemáticas como un proceso de enriquecimiento, tratando de mejorar capacidades cognitivas, y no de sustituirlas.

Un uso de estos recursos sin la adecuada reflexión previa, puede introducir distorsiones en el proceso de enseñanza. Pero así como la escritura numérica no es un obstáculo para que el niño pueda realizar cálculos mentales, la calculadora tampoco tiene por qué jugar ese papel. La calculadora no tiene porqué desmovilizar la actividad cognitiva del estudiante, pero siempre es indispensable la reflexión previa del profesor acerca del uso que puede hacer de ella.

Es fácil constatar cómo han crecido el número de proyectos educativos que incluyen la calculadora como una componente para alentar a profesores e investigadores a incluirlas en sus actividades, estableciéndose proyectos y programas específicos para la formación de docentes y estudiantes de matemáticas (Rojano & Moreno, 1999). Varios curriculares, como los del MECD (2001) y los del NCTM (2004), expresan la necesidad de incorporar en el currículo de matemáticas un uso de las calculadoras que resulte adecuado para el desarrollo de determinados procedimientos rutinarios, en la interpretación y análisis de situaciones diversas así como en la resolución práctica de situaciones relacionadas con la naturaleza, la tecnología, o simplemente, con la vida cotidiana. De este modo, se afirma que los estudiantes pueden investigar aspectos matemáticos como el estudio de las magnitudes, centrándose los estudiantes en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas.

En este documento queremos mostrar la calculadora como una herramienta de modelización que permite al estudiante centrarse en la interpretación de lo que está realizando y que no se quede estancado en la realización exclusivamente sintáctica de cálculos repetitivos y tediosos.

Anexo D.7 La calculadora TI-84 PLUS y los sensores CBR Y CBL-2:La matemática en movimiento.

La calculadora TI-84 Plus es una calculadora diseñada principalmente para el trabajo en Secundaria en matemáticas y ciencias, merced a sus variadas funcionalidades y a su versátil conectividad y actualización. Además de incluir todas las funciones básicas para las matemáticas de ese nivel, es posible cargar en la calculadora aplicaciones disponibles gratuitamente en Internet que permiten acceder a un gran número de temas educativos (TI, 2004). Además, es posible conectarlas a dispositivos adicionales que amplían aún más sus posibilidades, como ocurre con los sensores que aquí describiremos: el CBR y el CBL-2.

El sensor CBR

El Calculator-Based Ranger (CBR) es un detector sónico de movimiento compatible con la mayor parte de las calculadoras gráficas de Texas Instruments, que suministra la posibilidad de capturar y analizar datos reales fáciles de usar en el aula sin necesidad de programación. Trabajando conjuntamente con un sensor y una calculadora, los estudiantes pueden capturar, ver y analizar datos de movimiento extraídos de una práctica real, es decir, pueden modelizar experiencias físicas lo que supone una enorme ventaja con respecto a las tradicionales actividades con papel y lápiz (TI, 1997).

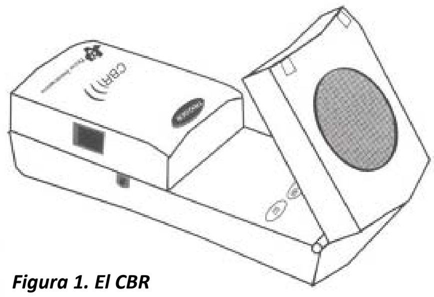


Figura 1. El CBR de Texas Instruments.

Así, el CBR relaciona nociones y procedimientos matemáticos y físicos tales como:

1. Distancia, Velocidad y Aceleración.
2. Gráficas de funciones: ejes de coordenadas, pendiente, corte con los ejes,…
3. Estudios de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, sinusoidales,…
4. Actividades de Análisis Matemático: Derivación, Integración,…
5. Métodos de captura de datos, análisis estadístico,…

El detector de movimiento envía una señal ultrasónica y posteriormente mide el tiempo que tarda dicha señal en volver después de chocar con el objeto más cercano. Pero el CBR además calcula la distancia al objeto (utilizando la velocidad del sonido), y halla la primera y segunda derivada con respecto al tiempo de los datos para obtener velocidades y aceleraciones del objeto. Toda esa información se manipula con un programa llamado **RANGE,** de muy sencillo manejo desde la calculadora.

El sensor CBL-2

El sistema Calculator-Based Laboratory 2 (CBL 2) es un dispositivo que junto con los sensores apropiados permitirá realizar modelizaciones mediante la toma de datos provenientes de diferentes fenómenos físicos, como fuerza, temperatura, luminosidad, sonido, o nivel de pH, entre otras magnitudes. El CBL 2™ funciona con el programa **DataMate** incorporado, y que es fácilmente transferible a la mayoría de los modelos de calculadoras de Texas Instruments. Este programa contiene la información básica necesaria para realizar un gran número de experimentos (TI, 2000).

Dependiendo del dispositivo conectado, el CBL-2 realiza distintas funciones. Así, si es el sensor de voltaje, podrán realizarse mediciones del voltaje de diferentes pilas; si el dispositivo es un sensor de luz, medirá la intensidad del haz de luz proyectada por una fuente, o si es un micrófono, pueden medirse el nivel de decibelios o la amplitud de ondas sonoras.

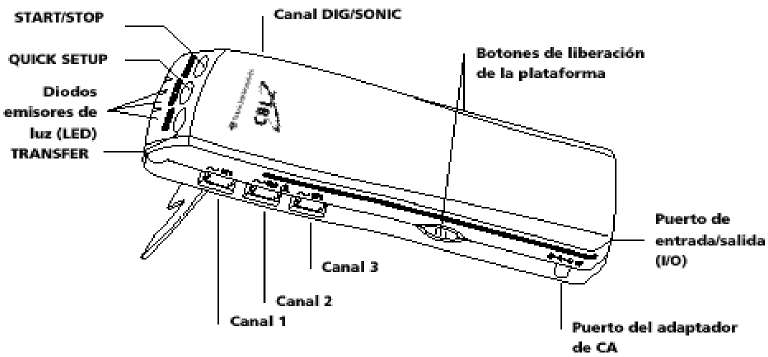


Figura 2. El CBL-2 de Texas Instruments.

UN EJEMPL… RIA”

En esta activ… to de los escolares acerca de la información que suministra la representación gráfica de funciones. El tipo de funciones que se trabajan son lineales, y funciones definidas a trozos en las que cada uno de los intervalos de definición representa una relación lineal. De esta manera, la actividad puede plantearse a partir de 3º de ESO, y está parcialmente basada en la propuesta de Texas Instruments (TI, 2000; pp. 13-16).

Uno de los experimentos que incluye el programa Ranger con el que se comunican el CBR y la calculadora, es el **Dist Match**, dentro del menú **Applications**.

En este experimento la calculadora muestra una gráfica que relaciona un espacio recorrido, con respecto al tiempo. Las unidades de medida de longitud pueden expresarse en metros o pies, y el tiempo se mide en segundos. El objetivo es que los escolares reproduzcan con su movimiento lo que indica la gráfica.

Al sujetar el CBR apuntando directamente a una pared y pulsando ENTER en la calculadora (figura 3), el sensor mide la variación de la magnitud seleccionada con respecto al tiempo, y se muestra esa variación en otra gráfica punteada cuando nos acercamos o alejamos de la pared con el sensor (figura 4):

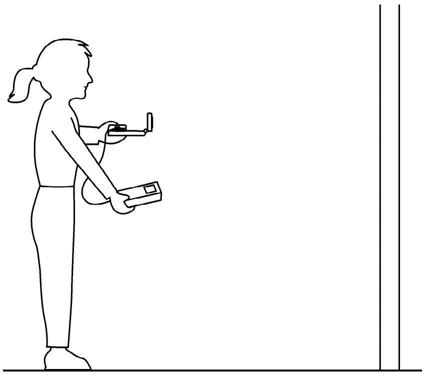


Figura 3. Preparación del experimento

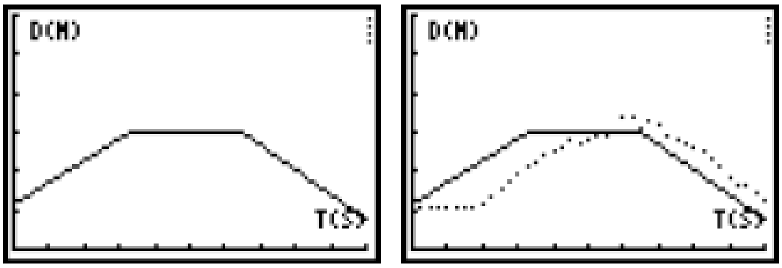


Figura 4: Siguiendo la trayectoria

Algunas de las cuestiones que pueden tratar de responder los escolares son:

1. ¿Qué propiedad se representa en cada uno de los ejes?
2. ¿Qué significan las marcas que hay en los ejes? ¿Qué miden?
3. ¿Dónde tendríamos que situarnos para comenzar correctamente el movimiento, y dónde deberíamos finalizar?
4. Si en un tramo la gráfica asciende ¿tendríamos que caminar hacia delante o hacia atrás? ¿Y en un tramo en que la pendiente sea plana?
5. ¿Podemos saber si debemos movernos deprisa o despacio?
6. ¿Qué distancia hemos recorrido en total?
7. ¿Podríamos hacer otro movimiento diferente que diera como resultado la misma gráfica?

Con esta actividad, los estudiantes pueden llegar a ser capaces de interpretar en términos de la realidad la información que hay en la representación gráfica de una función. A menudo, el trabajo con funciones se centra en producir la representación gráfica a partir de la expresión algebraica, pero en este caso, se promueven una serie de acciones encaminadas a profundizar en el estudio propio de una función representada gráficamente y de elementos característicos suyos, como los intervalos de crecimiento, los de decrecimiento y los constantes, la relación y escala entre los ejes, las unidades de medida, etc.

Por otro lado, los estudiantes manejan de manera práctica nociones físicas como la distancia, la velocidad, o el tiempo, y que generalmente no son más que datos estáticos en los problemas. Con este tipo de problemas los escolares se involucran directamente en la resolución de problemas. Además, si se usa un proyector en el aula para que todos puedan ver el desarrollo del experimento, se fomenta el debate y la participación colectiva de todos los escolares.

CONCLUSIONES

Aunque sin duda no deja de sorprendernos lo que se puede hacer con el uso de estos recursos tecnológicos, es necesario incidir en la necesidad de una planificación adecuada de estas actuaciones dentro de un plan instruccional coherente y bien diseñado. A la hora de planificar una o varias sesiones acerca de un tema matemático, el profesor debe realizar varios análisis, tanto sobre la matemática que será objeto de enseñanza, como desde un punto de vista cognitivo, pensando en cómo lograr un aprendizaje significativo en los escolares.

Carece de todo sentido emplear estos recursos en el aula con el único objetivo de renovar o actualizar nuestra labor docente. Todos los materiales y recursos que puede usar el profesor en su labor docente han de jugar un papel muy concreto en ese proceso. Como señala Gómez (2004), el éxito de su empleo depende de que el profesor diseñe y lleve a la práctica el currículo de tal forma que la tecnología contribuya a que los escolares adquieran aprendizaje. El diseño de las actividades deberá surgir de una correcta planificación curricular con nuestro conocimiento de la tecnología dentro del contexto del problema que queremos abordar. Como parte de esa planificación, es necesario detallar los conceptos, procedimientos y sus relaciones que trabajaremos en el aula; definir qué competencias queremos desarrollar en los escolares acerca de ese conocimiento, y analizar qué recursos podemos poner en juego para lograr eficazmente ese desarrollo.

BIBLIOGRAFÍA

Gómez, P. (2004). *Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas.* Trabajo presentado en las X Jornadas de Investigación en el aula de matemáticas: Nuevas tecnologías de la información y la comunicación, Granada.

Lupiáñez, J. L. (2000) *Nuevos Acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la Calculadora TI-92.* Granada: Universidad de Granada.

NCTM (2004). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD) (2000). *Real Decreto 3473/2000 de 29 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria*. Madrid: BOE.

Penglase, M. & Arnold, S. (1996). The Graphics Calculator in Mathematics Education: A Critical Review of Recent Research. En *Mathematics Education Research Journal,* 8(1), 58-90.

Rojano, T. & Moreno, L. (1999). Educación Matemática: Investigación y Tecnología en el Nuevo Siglo. En *Avance y Perspectiva*, 18, pp. 325-333.

TI (1997). *Procedimientos iniciales con el CBR*. Dallas, TX: Texas Instruments.

TI (2000). *Procedimientos iniciales del CBL 2*. Dallas, TX: Texas Instruments.

TI (2004). *TI-84 Plus y TI-84 Plus Silver Edition*. Dallas, TX: Texas Instruments.

ANEXO E

Anexo E.1: Geometría de transformaciones en el currículo oficial

Geometría de transformaciones en el currículo oficial DECRETO 105 DE 9/06/1992 boja 20/6/1992

1º ciclo

Las transformaciones aparecerán en contextos de manipulación de modelos. Únicamente en el 4º Curso se considerarán como objetos de estudio con interés propio. En este Ciclo, el objetivo principal es conseguir una cierta destreza en el manejo gráfico y en la descripción cualitativa de proyecciones e isometrías como resultado de manipulación de modelos; las cuestiones relacionadas con proporcionalidad y semejanza, y sus aplicaciones a las escalas, mapas y planos, conllevarán, además, aspectos cuantitativos.

Reconocimiento, manipulación y descripción cualitativa de: Proyecciones (de puntos y figuras elementales sobre rectas y planos según una dirección dada). Traslaciones y reflexiones (en el plano y en el espacio) y giros (en el plano). La noción de isometría constituye un aprendizaje que todas las alumnas y alumnos deberían conseguir al final de la Etapa. Se trata de una construcción lenta, que necesita de muchas horas de manejo de isometrías concretas, de sus inversas y de algunas composiciones notables.

3º ESO

- Geometría de transformaciones
- Revisiones del trabajo realizado en el Ciclo anterior.
- Idempotencia de una proyección dada.
- Aplicaciones de las traslaciones, giros y reflexiones en el plano a la construcción de rosetones, frisos y mosaicos planos.
- Inversa de una traslación dada.
- Composición de dos traslaciones dadas.
- Inversa de una reflexión dada.
- Composición de dos reflexiones.
- Inverso de un giro dado.
- Composición de dos giros del mismo centro.
- Orden de un giro.
- Reflexión en deslizamiento.

4º ESO

4º A

Revisión, afianzamiento y sistematización de la geometría estudiada en la Etapa.

4º B

Reconocimiento de isometrías que dejan invariante una figura dada o un cuerpo dado.

Se pretende que los alumnos determinen algunas isometrías de cualquier figura o cuerpo.

Tablas de composición de algunas isometrías.

Los contenidos procedimentales se establecieron de manera única para toda la tema en este Decreto de enseñanzas.

Anexo E.2.

Todos sabemos que los conceptos en matemáticas adquieren mayor complejidad en sus significados. Se ejercita la compresión y están ligados a los procedimientos pero tienen su propia idiosincrasia. Un ejemplo de desglose entre conceptos y procedimientos es el esfuerzo que hizo el decreto de enseñanzas mínimas publicado por el Ministerio de Educación con motivo de la LOGSE. (RD 1345/1991 de 6 de Septiembre. BOE 220 13/09/1991)

En el ámbito del tópico que tratamos dice:

Representación y organización en el espacio

Conceptos.

1. Elementos y relaciones básicos para la descripción y organización del plano y el espacio.
2. Figuras y cuerpos geométricos: Elementos característicos y relaciones entre ellos.
3. Semejanza de figuras.
4. Traslaciones, giros y simetrías.

Procedimientos.

5. Utilización de la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas.
6. Construcción y utilización de modelos geométricos, esquemas, mapas y planos.
7. Identificación de la semejanza entre figuras y cuerpos geométricos, y obtención del factor de escala.
8. Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones en cuerpos, figuras y configuraciones geométricas.
9. Identificación de problemas geométricos diferenciando los elementos conocidos de los que se pretende conocer y los relevantes de los irrelevantes.
10. Utilización de la composición, descomposición, intersección, movimiento, deformación y desarrollo de figuras, cuerpos y configuraciones geométricas para analizarlos u obtener otros.
11. Reducción de problemas complejos a otros más sencillos para facilitar su comprensión y resolución.

Anexo E.3: Factores psicológicos y didácticos que influyen en la enseñanza de las isometrías del plano

Factores psicológicos y didácticos que influyen en la enseñanza de las isometrías del plano

El excelente libro de Adela Jaime y Ángel Gutiérrez (Jaime, A. Gutiérrez, A, 1996) es un ejemplo de esfuerzo por acercar estas investigaciones citadas al profesorado. Resumimos algunas de sus aportaciones

a) Los niveles de razonamiento geométrico Van Hiele y la geometría de transformaciones

Son muy conocidas estas investigaciones y en cualquier buscador o en el libro que se acaba de citar se encuentran el detalle de ellas. Exclusivamente vamos a incluir aquí una diferenciación por niveles de aprendizaje para isometrías del plano

- Nivel 1 Reconocimiento
- Considerar los movimientos de manera global
- Reconocer la invariancia de tamaño y forma en isometrías
- Reconocer los movimientos por la acción o resultados
- Realizar construcciones de imágenes por movimientos con materiales auxiliares en distintas posiciones.
- Utilizar la percepción visual para reconocer imágenes transformadas
- Utilizar un vocabulario básico sobre movimientos.

- Nivel 2 Análisis
- Expresar matemáticamente los movimientos y utilizar correctamente sus elementos.
- Identificar los elementos de los movimientos cuando se conocen las figuras transformadas, en casos concretos.
- Descubrir propiedades por generalización de casos concretos y aplicarlas a nuevos casos
- Utilizar los movimientos con notación y vocabulario matemáticos

- Nivel 3 Clasificación
- Identificar las características de cualquier giro. Generalizar los resultados de componer giros de distinto centro
- Comprender las simetrías en deslizamiento sus propiedades y relaciones
- Comprender argumentos de demostración de propiedades sencillas.
- Manejar la posibilidad de descomponer en múltiples casos la misma isometría y utilizar la descomposición para demostrar propiedades.

- Establecer inferencia generales sin apoyarse en casos concretos.

- Nivel 4 Deducción formal
- Razonar formalmente

Comprender la estructura algebraica de las isometrías

Anexo E.4: Errores y dificultades en geometría de transformaciones extraídos de los trabajos de: Moyer, Thomas, Schulz o Kidder

Errores y dificultades en geometría de transformaciones extraídos de los trabajos de: Moyer, Thomas, Schulz o Kidder

- Las traslaciones son más fáciles que las simetrías y los giros en ejercicios simples.
- Para cualquier isometría, los movimientos horizontales son mucho más fáciles que en diagonal.
- Los ejercicios con figuras grandes son más sencillos que con figuras pequeñas. Si las figuras son significativas resultan más sencillas que con figuras abstractas.
- Se apunta ya que la dificultad no sólo depende del tipo de isometría sino también del tipo de ejercicio dentro de cada isometría
- Las investigaciones del proyecto Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS) dirigidas por K. Hart amplían considerablemente el contexto en el que se presentan las actividades (con y sin cuadrícula) y (complejidad de la figura a mover). (Hart, K., 1981)
- Las investigaciones de Jaime y Gutiérrez J. avanzan en la misma línea pero ampliando el campo a estudiantes de magisterio.
- En las investigaciones anteriores se pueden detectar los siguientes tipos de errores Jaime y Gutiérrez (1996):

Simetrías

- Errores cuyo origen está en el concepto de simetría
- Errores cuyo origen está en una interpretación deformada del concepto.
- Más facilidad al dibujar sobre cuadrículas que sin cuadrículas y con reflexiones horizontales y verticales que inclinadas; más difícil si la inclinación no es de 45º

Giros

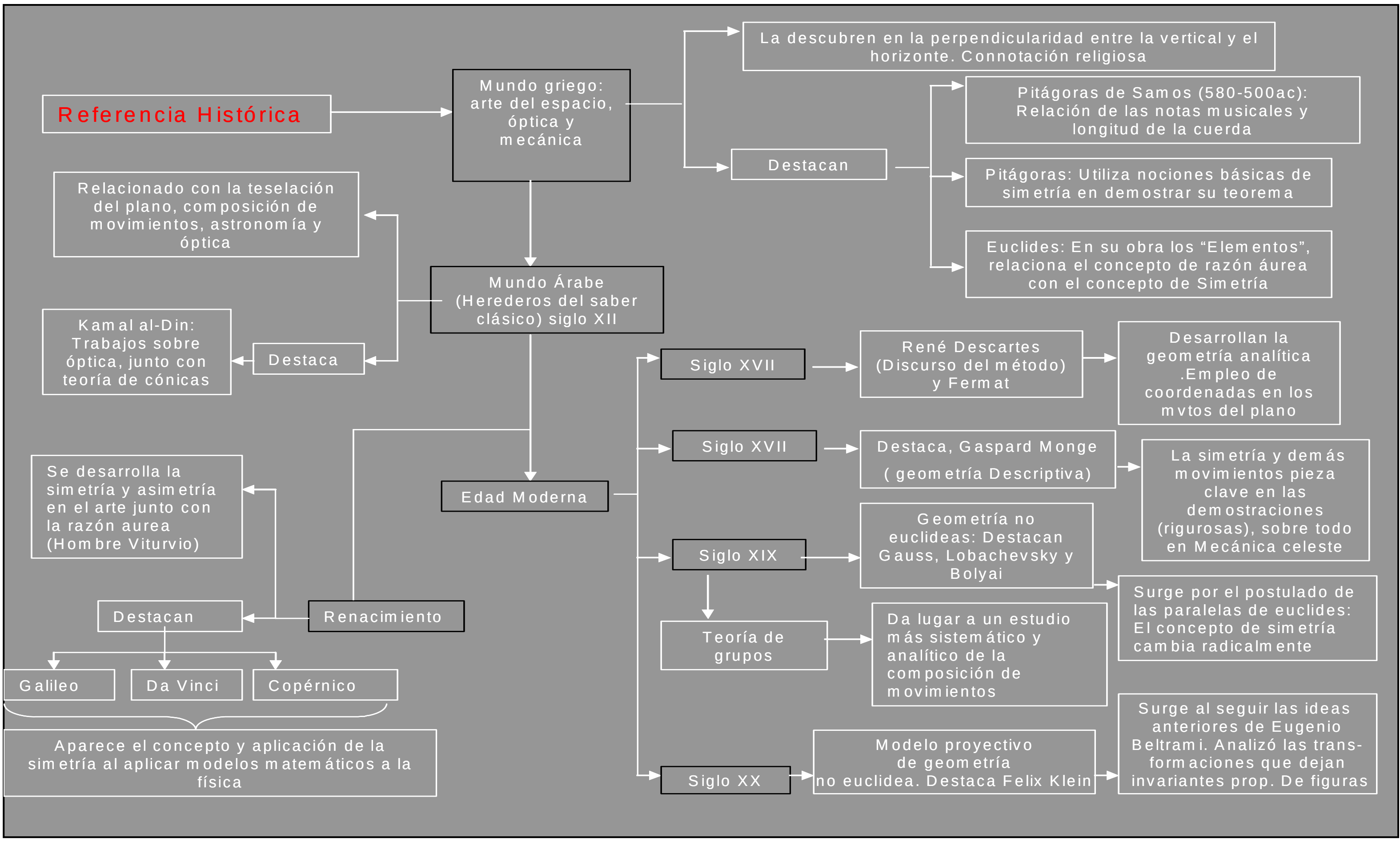
- Es más fácil girar una figura si contiene el centro de giro que si es exterior
- Sólo en giros de 90º, la dificultad aumenta si se giran segmentos inclinados sobre segmentos verticales.
- Los errores en giros se producen por no reconocer las cinco características básicas del giro: reconocimiento global, ángulo de giro, equidistancia al centro, ángulo entre el punto y su imagen y congruencia de figuras

Traslaciones

- Es la isometría más fácil de operacionalizar
- Dificultad al comprender el concepto de vector libre como asociado a una traslación
- Errores en la realización de traslaciones cuando la figura es poligonal y el vector es paralelo a algún lado del polígono.

Anexo E.5: Esquema del desarrollo histórico de la Geometría de Transformaciones.

Fuente : Proyecto fin de curso asignatura Didáctica de la Matemática. Alumnos: Alguacil, A.; Luque, J.M.; Pérez, A. Segura, E.J. Universidad de Granada



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alcalá, M. (2011). *El Material para la enseñanza de las matemáticas.* En http://www.quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_7/nr_111/a_1343/1343.htm (revisada el 20 de mayo de 2011)

NCTM (2003) *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Granada: S.A.E.M Thales.

Alcalá, M. (1986). *Fracciones*. Granada, MCEP.

Alcalá, M. (2001). Las operaciones con fracciones en el primer ciclo de la ESO. *Aula de Innovación Educativa*, nº 107, 38-42.

Alonso, P., Antolín, J., Bernardo, V., García J. y Pastor, M.C. (Coord.) (2001). *Fotografía Matemática.* Zaragoza: Diputación de Zaragoza y Diputación General de Aragón.

Alsina- Burgués- Fortuny (1989). *Invitación a la didáctica de la Geometría* Ed. Sintesis. Madrid

Alsina- Burgués- Fortuny (1989). *Materiales para construir la geometría* Ed. Síntesis. Madrid.

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J.M. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid, Síntesis.

Alsina, Pérez, Ruiz (1989). *Simetría dinámica*. Ed. Síntesis. Madrid

Asociación española de Papiroflexia. Página web de su revista Pajarita: www.pajarita.org.

Benítez, M.A. y Serrano, F. (2006). Gymkhana Matemática: Un recurso para la enseñanza de la Geometría. Taller en *Investigación en el Aula. La enseñanza y el aprendizaje de la Geometría*. Granada, SAEM THALES y Departamento de Didáctica de la Matemática.

Berenguer, L., Berenguer, M.I. y Berenguer, J. (1995). El alumno como investigador. Materiales para el aprendizaje de las matemáticas. *Investigación en el aula de matemáticas*. Granada, Departamento Didáctica de la Matemática y SAEM THALES.

Bossard, I. (1979). *Rosaces, frises et pavages* (vol. 1 y 2) CEDIC. France

Briales, F.J. y Jiménez, M. (1988). *Matemática viva*. Madrid, Alhambra.

Burgués, C., Alsina, C. y Fortuny, J.M. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid, Síntesis.

Caballero, S. y otros (1990). *Materiales Reforma M-12*. Valencia, Generalitat Valenciana, Consejería de Cultura, Educación y Ciencia.

Carretero, R. Coriat, M. y Nieto, P. (1995). Secuenciación, Organización de Contenidos y Actividades de Aula. Junta de Andalucía, *Materiales Curriculares. Educación Secundaria Obligatoria*, Vol. 17, Sevilla: Consejería de Educación y Ciencia.

Carrillo, A. y Llamas, I. (2009). *GeoGebra. Mucho más que geometría dinámica*. Madrid: Ra-Ma.

Cascallana, M.T. (1988). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid, Aula XXI.

Castelnuovo, E. (1970). *Didáctica de la Matemática Moderna*. Madrid, Trillas.

Chevalard, Y. y Conne, F. (1984) Jalons a propos d'algebre. *Interactions didactiques*. Génève, FASPE.

Coll, C. (1987). *Psicología y Currículum.* Ed Paidós Barcelona

Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas (1964). *El Material para la Enseñanza de las Matemáticas*. Madrid, Aguilar.

Corbalán, (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid, Síntesis.

Coriat, M. (1989). Baraja de Fracciones. *SUMA 3*, 69-72.

Coriat, M. (1997). Materiales, Recursos y Actividades: Un panorama. En Rico, L. (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, Horsori. Pp. 155-178.

Coriat, Marín, Palomino, Rico (1994). *Matemáticas 4º E.S.O. (opción B).* Ed. Algaida, Sevilla 1994 (libro del alumno y del profesor)

Coriat, Marin, Palomino, Rico (1994). *Matemáticas 4º E.S.O. (opción A).* Ed. Algaida, Sevilla 1994 (libro del alumno y del profesor)

Currículo de matemáticas para Educación Primaria Junta de Andalucía. http://www.juntadeandalucia.es/averroes/publicaciones/mc_primaria.php3

Currículo de matemáticas para Educación Secundaria Junta de Andalucía. http://www.juntadeandalucia.es/averroes/publicaciones/mc_eso.php3

Decreto por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO. BOE 5 de Enero de 2007.

Fernández Aliseda, A. y otros. (2000). *Lectura matemática de un periódico*. Sevilla, CEP de Castilleja de la Cuesta.

Fernández, A. y Rico, L. (1995). *Prensa y Matemáticas*. Madrid, Síntesis.

Flores, P. (2001). Aprendizaje y evaluación. En Castro, E. (Ed.), *Didáctica de la Matemática en Educación Primaria Madrid*, Síntesis. Pp. 41-60. (Disponible en http://www.ugr.es/local/pflores/)

Flores, P. (2002a) *Laberintos en alambre. Estructuras topológico-métricas*. *SUMA* 41, 29-35.

Flores, P. (2002b) Taller de resolución de problemas Puzzles en alambre. En J.M.Cardeñoso y otros (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas*. Págs. 113-116. Granada, SAEM THALES y Departamento de Didáctica de la Matemática.

Flores, P. (2003). Evaluación ¡Qué risa! En Cardeñoso, J.M. Lupiáñez, J.L., Moreno, A.J. y Peñas, M. (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Evaluación en Matemáticas*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, SAEM THALES. 243-250.

Flores, P. (2003). *Humor gráfico en el aula de matemáticas*. Granada, Arial.

Flores, P. (2003b). Evaluación ¡Qué risa! En Cardeñoso, J.M. Lupiáñez, J.L., Moreno, A.J. y Peñas, M. (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Evaluación en Matemáticas*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, SAEM THALES. 243-250.

Flores, P. (2004). TIC … TAC. En Cardeñoso, J.M. Lupiáñez y Peñas, M. (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Tecnologías de la Información y la Comunicación*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, SAEM THALES.

Flores, P. (2004b). Chistes para contar. Comunicación en CEAM, Huelva, abril 2004.

Flores, P. (2005).Je ¡Oh! ¿Metría? En Lupiáñez, J.L., Cardeñoso, J.M. y García, M. (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. La Geometría*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, SAEM THALES

García, A., Martínez, A. y Miñano, R. (1995). *Nuevas Tecnologías y Enseñaza de las Matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Gómez, J. (2002). *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona, Paidós.

Gómez, P. (2004). Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas. En M. Peñas, A. Moreno, J. L. Lupiáñez (Eds.) *Investigación en el aula de matemáticas. Tecnologías de la información y la comunicación*. (pp. 73-95). Granada: SAEM “THALES” y Dpto. de Didáctica de la Matemática (Univ. de Granada).

González, E. (1999) La fotografía como recurso en la clase de matemáticas. En M.I. Berenguer, J.M. Cardeñoso y J.M. Sánchez (Eds). *Investigación en el Aula de Matemáticas. Los Recursos*. (pp. 37-64). Granada: Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, y S.A.E.M. Thales.

González, E. y Rico, L. (Coord.) (2000). *Itinerarios Fotomatemáticos en Granada. Cuaderno de Campo.* Granada: Universidad de Granada y Parque de las Ciencias de Granada.

Greer, B. (1992) Multiplication and Division as Models of Situations. In *Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* ed Douglas A.Grouwe, pp. 276-95 Nueva York: MacMIllan Publishing Co.

Grupo Alquerque (2008). *Doblar y contar (Kirigami geométrico).* Suma 59, 55-58.

Grupo Azarquiel (1991). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid, Síntesis

Grupo Beta(1990*). Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Ed. Síntesis. Madrid

Grupo del APMA (1984). Estudio metodológico del número fraccionario en 6º de EGB. *Épsilon 3*, 3-24.

Grupo PI (2005). Experiencia en el aula de secundaria con fractales. En Lupiañez, J.L., Cardeñoso, J.M. y García, M. (Eds.) (2006), *Investigación en el aula de Matemáticas. La Geometría* (pp. 213-221). Granada: S.A.E.M.

Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Guillén, G. (1991). *Poliedros*. Madrid. Síntesis.

Guitart-Coria, M. B. y Flores, P. (2001). Humor gráfico para la enseñanza y el aprendizaje del azar. *Suma 42,* 81-89.

Guitart-Coria, M.B. (2010). *Permitido reir, estamos en clase*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Mendoza, República Argentina

Harrison, I. (1995). Origami spheres. *Mathematics Teaching* 153.

Hart, K. (ed.) (1981): Children's understanding of mathematics*: 11-16.* (John Murray: Londres).

Hernán, F. y Carrillo, E. (1988). *Recursos en el Aula de matemáticas*. Madrid, Síntesis.

Hogben, L. (1966). *El universo de los números*. Barcelona, Destino.

Jaime, A - Gutiérrez, A.(1996). El grupo de las isometrías del plano. Ed. Síntesis. Madrid

Junta de Andalucía, Consejería de Educación. *ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía*. BOJA núm. 171 Sevilla, 30 de agosto 2007.

Kamii, C. (1985). *El niño reinventa la aritmética.* Barcelona: Aprendizaje-Visor

Kasahara, K. y Takahama, T. (2000). *Papiroflexia para expertos*. Madrid, Edaf.

Ledesma, A. (1996). Papiroflexia y Matemáticas. *Pajarita*, Número extra.

Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1991). *Fracciones*, Madrid, Síntesis.

Lupiáñez, J. L. (2000). *Nuevos Acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la Calculadora TI-92*. Granada: Universidad de Granada.

Lupiáñez, J. L., Codina, A. (2004). *Calculadoras y sensores: la matemática en movimiento*. En M. Peñas, A. Moreno, J. L. Lupiañez (Eds.) Investigación en el aula de matemáticas. Tecnologías de la información y la comunicación. (pp. 143-149). Granada: SAEM "THALES" y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Meavilla, V. y Contreras, J.A. (1991). *Viaje gráfico por el mundo de las matemáticas 1*. Zaragoza, Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Zaragoza.

Miller, Ch D y Heeren, V E (1979) *Introducción al pensamiento matemático*, México: Ed Trillas.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007a). *ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. BOE, 173*, 31487-31566.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007b). *ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria*. *BOE, 174*, 31680-31828.

Ministerio de Educación y Ciencia. (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de Diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid, BOE 5 de 5 de Enero de 2007.

Mitchell, D. (1997). *Mathematical Origami*. Cambridge, Tarquin

Montoya, C. y Flores, P. (2003). Los puzzles de alambre como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas. La Gaceta de la RSME, Vol. 6.3, 665-684. disponible en http://www.ugr.es/~pflores/

Muñoz, J., Fernández-Aliseda, A. y Hans, J.A. (2000). Matemáticas en la calle. *Épsilon* 48, Vol 16(3), pp. 125-141.

Navas, J. (1997). Una experiencia del comentario de texto en matemáticas. Existencia del número irracional. Comunicación en *Investigación en el aula de matemáticas. El currículo.* Granada. SAEM THALES y Departamento de Didáctica de la Matemática. Disponible en

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Nelson, R.B. (2000). *Proofs without words II*. Washington, The Mathematical Association of America.

OCDE (2004) *Marcos teóricos de PISA 2003 Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. OCDE

OCDE (2005). *Informe PISA 2003*. Madrid, Santillana.

Página web del Grupo LaX, Disponible en http://www.ugr.es/~pflores/

Penglase, M. y Arnold, S. (1996). The Graphics Calculator in Mathematics Education: A Critical Review of Recent Research. En *Mathematics Education Research Journal,* 8(1), 58-90.

Peña, J. de la (2001). *Matemáticas y Papiroflexia*. Madrid, Asociación Española de Papiroflexia.

Pérez Gómez, R. (Coor.) (1997). *Construir las Matemáticas. Libros de texto de matemáticas para la ESO*. Granada, Proyecto Sur.

Ponte, J.P., Boavida, A.M., Graça, M. Y Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática. Lisboa*, Ministerio da Educaçao, PRODEP. (pp. 71-95). (Disponible una traducción en http://www.ugr.es/local/pflores/).

Puig Adam, P. (1958). *El Material Didáctico Matemático A*ctual. Madrid, Publicaciones de la Revista de Enseñanza Media, Ministerio de Educación Nacional.

Rico, L (coord) (1997) *La educación matemática en la Enseñanza secundaria*. Ed. Horsori Barcelona

Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.

Rojano, T. y Moreno, L. (1999). Educación Matemática: Investigación y Tecnología en el Nuevo Siglo. En *Avance y Perspectiva*, 18, pp. 325-333.

Roldán, I. (2002). *Teatromático*. Madrid, Nívola.

Romero. O. y García, E. (2003). Matemáticas a escena. Taller en *Jornadas de Investigación en el aula de matemáticas. La evaluación*. Granada, SAEM THALES y Departamento de Didáctica de la Matemática.

Saa, M.D. (2002). *Las matemáticas de los cuentos y canciones*. Madrid, EOS.

Sierra, M., González, T., García, A. y González, M. (1989). *Divisibilidad*. Madrid: Síntesis.

Steen, L.A. (1998). *Las matemáticas en la vida cotidiana* Coed. Addisson-Wesley UAM New York

Steen, L.A. (1998).*La enseñanza agradable de las matemáticas*. México, Limusa.

Szendrei, J. (1996). Concrete Materials in the Classroom. En Bishop et all. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education*, 411-434. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Thompson, P.W. (1994). Concrete Materials and Teaching for Mathematical Understanding. *Arithmetic Teacher* Vol. 41, nº 9, 556-558. (Versión en español de la Fundación Santillana).

Uribe, D. (1988). *Fractal cuts*. Cambridge, Tarquin.

Usiskin, Z. (1980): "Conceptions of school algebra and uses of variables", En Coxford, A.F. (Ed.) *The ideas of Algebra, K-12*, Yearbook. NCTM, Reston, Virginia.

Van der Meer, R. & Gardner, B. (s.f.). *Carpeta de Matemáticas*. Destino.

Velázquez, F. (coord.) (2004). *Matemáticas e Internet*. Barcelona: Grao.